Aufgabe 1. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sowie den Eigenraum zum Eigenwert λ_2.

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten von A bzgl. des Standardskalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^3$ zueinander orthogonal sind.

(c) Ist A positiv definit oder invertierbar?

6 Punkte

Aufgabe 2. Begründen Sie, dass zum folgenden AWP

$$y' - \frac{y}{t} = t \quad \text{für } t \in [1, \infty), \qquad y(1) = 1$$

die Lösung eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie diese.

3 Punkte

Aufgabe 3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Gegeben sei das AWP

$$y' = 2xy \quad \text{in } [a, b] \times \mathbb{R}, \quad y(0) = c. \tag{1}$$

(a) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen der Picard-Lindelöf Iteration erfüllt sind und dass eine eindeutige Lösung des Problems (1) existiert.

(b) Berechnen Sie explizit die ersten drei Picard-Lindelöf Iterationen y_0, y_1, y_2 des Problems (1).

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die n-te Picard-Lindelöf Iteration y_n des Problems (1) gilt:

$$y_n(x) = c \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad x \in [a, b].$$

Bestimmen Sie den punktweisen Limes der Picard-Lindelöf Iterationsfolge (y_n). Löst dieser Limes das Problem (1)?

7 Punkte

Aufgabe 4. Es sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0, y \neq 0\}$. Bestimmen Sie die Extremstellen von

$$g : M \to \mathbb{R},\ g(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

4 Punkte

Aufgabe 5. (a) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \tag{2}$$
$$2x_1 + 5x_2 = 12 \tag{3}$$
$$-x_1 + 6x_3 = 17. \tag{4}$$

(b) Schreiben Sie das Gleichungssystem aus (a) um in Matrix-Vektor-Schreibweise $Ax = b$. Berechnen Sie die Choleskyzerlegung der Matrix A.

(c) Eine QR Faktorisierung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei gegeben. Skizzieren Sie ein Programm zum Berechnen der Lösung von $Ax = b$, x, $b \in \mathbb{R}^n$, und geben Sie eine Aufwandsabschätzung für den Lösungsschritt an.

4 Punkte

Aufgabe 6. (a) Von einem Quader mit Seitenlängen a, b und c werden die Kantenlängen und Umfänge (jeweils senkrecht zu einer der Kanten) vermessen. Die Messergebnise sind $a \sim 22mm$, $b \sim 28mm$, $c \sim 50mm$ und $U_a \sim 161mm$, $U_b \sim 139mm$, wobei $U_a = 2b+2c$ den Umfang senkrecht zur Kante der Länge a bzw. $U_b = 2a+2c$ den Umfang senkrecht zur Kante der Länge b bezeichne.
Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate Näherungswerte für die Seitenlängen a, b und c.

(b) Ein überbestimmtes Gleichungssystem $Ax \simeq b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$ soll mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate näherungsweise gelöst werden. Skizzieren Sie zwei unterschiedliche Verfahren zum Lösen des Ausgleichsproblems, beschreiben Sie deren Vor- bzw Nachteile und schätzen Sie jeweils den Aufwand. Welche Voraussetzung an den Rang von A wird benötigt?

5 Punkte

Aufgabe 7. (a) Berechnen Sie $\int_0^1 x^2 dx$ näherungsweise mit (i) der zusammengesetzten linksseitigen Rechtecksregel, (ii) der Trapezregel und Schrittweiten $h = 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2$.

(b) Finden Sie für beide Verfahren eine Abschätzung des Fehlers und verifizieren Sie die Beobachtung aus (a).

(c) Wieviele Teilintervalle müssen bei (i) und (ii) in etwa gewählt werden, um den Fehler kleiner als 10^{-6} zu machen.

5 Punkte

Aufgabe 8. Für Matrizen $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

eine Matrixnorm (die Frobeniusnorm). Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_F$ submultiplikativ ist, d.h., dass für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

Hinweis: Sei $C := AB$. Betrachten Sie $\|C\|_F^2$ und verwenden Sie zur Abschätzung von C_{ij}^2 die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

3 Punkte