

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

2

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem lösbar ist.

$$\begin{aligned}tx_1 + x_2 &= 1 \\4x_1 + tx_2 &= 2 \\t^2x_1 + 2x_2 &= 1 + (t - 1)^2\end{aligned}$$

Geben Sie außerdem alle $t \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem

1. genau eine,
2. genau zwei,
3. unendlich viele Lösungen

besitzt.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

3

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

4

Aufgabe 2. Berechnen Sie $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ aus der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wenn Sie richtig gerechnet haben, werden Sie feststellen, dass $\det(X) = -1$ gilt. Zeigen Sie $\det(X) = -1$, ohne die berechnete Lösung von X zu benutzen.

4 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

5

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

6

Aufgabe 3. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenräume $ER(\lambda_i)$. Ist A diagonalisierbar? Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ an.

8 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

7

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

8

Aufgabe 4. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y'' - 4y' + 5y = 5e^x \cos x$$

mit $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

Tipp: Probieren Sie den Ansatz $y_s = Ae^x \cos(x) + Be^x \sin(x)$ zum Finden einer speziellen Lösung.

7 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

9

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

10

Aufgabe 5. Es sei $F(x, y, z) = xe^x + y \sin y - z \ln z$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

für (x, y, z) hinreichend nah bei $(1, \pi, e)$ nach y bzw. z aufgelöst werden kann.
Berechnen Sie für $y = y(x, z)$ bzw. $z = z(x, y)$ die Ableitungen $y'(1, e)$ bzw. $z'(1, \pi)$.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

11

Aufgabe 6. a) Bestimmen Sie den maximalen Exaktheitsgrad der Quadraturformel

$$I_h(f; 0, h) = h[af(0) + bf(\frac{1}{2}h)]$$

und Parameter a und b , bei denen dieser realisiert wird. Welche Konvergenzrate ist für den Verfahrensfehler der zugehörigen summierten Integrationsformel bei der Berechnung des Integrals $\int_0^1 x^2 dx$ zu erwarten?

- b) Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit der Methode mit der summierten linksseitigen Rechtecksregel. Berechnen Sie $\int_0^1 x^2 dx$ näherungsweise mit beiden Methoden und Schrittweiten $h = 1, 1/2, 1/4$. Sollten Sie bei a) keine Lösung erzielt haben, verwenden Sie als zweite Methode die Mittelpunktsregel.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

13

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

14

Aufgabe 7. a) $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien orthogonal. Zeigen Sie, dass dann auch $Q := Q_1 * Q_2$ orthogonal ist.

b) Berechnen Sie mittels Householder-Transformation eine QR -Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

15

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

16

- Aufgabe 8.** a) Leiten Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung der Koeffizienten der Ausgleichsgerade $g(x) = a + bx$ her, welche die Summe der Quadrate der Abstände zu 4 Messpunkten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) minimiert.
- b) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade für die Messwerte $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$. Skizzieren Sie die Lösung.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

17

Aufgabe 9. Wir betrachten die Abbildungen

$$\phi_1(x) = x^2 - x + 2,$$

$$E_1 = \mathbb{R}$$

$$\phi_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y - 3 \\ 2x + 2y - 4 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \mathbb{R}^2$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x^2 - xy - 2x + 4 \\ y^3 - 2xy + 2 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = [0, 1]^2$$

Überprüfen Sie welche der Abbildungen ϕ_i einen Fixpunkt in E_i besitzen. Beweisen Sie Ihre Behauptungen. Berechnen Sie (gegebenenfalls) die Fixpunkte exakt oder zumindest näherungsweise mittels 2 Schritten einer geeigneten Iteration ausgehend von $x_0 = 0$.

7 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

19

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

20

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

21

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

22

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

23

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

24