

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2025
Klausur | 25.08.2025

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, 11.09.2025 von 10:30-12:00 Uhr im Rogowski, KIPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ____

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
Punkte	4	7	4.5	4	5.5	5	3	4	7	5	3.5	6	6.5	4	6	75
Ihre Punkte																

Klausur Bonus Gesamt

+ =

Note:

Aufgabe 1.a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix Df von f . Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ an denen f lokal invertierbar ist.

Berechnen Sie, wo sie existiert, die Inverse der Jacobimatrix Df^{-1} .

Hinweis: $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

b) Finden Sie eine Funktion

$$g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad g(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

sowie der folgenden Eigenschaft: In jeder Umgebung von $(0, 0)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, für das die Gleichung $g(x, y) = 0$ keine Lösung besitzt.

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

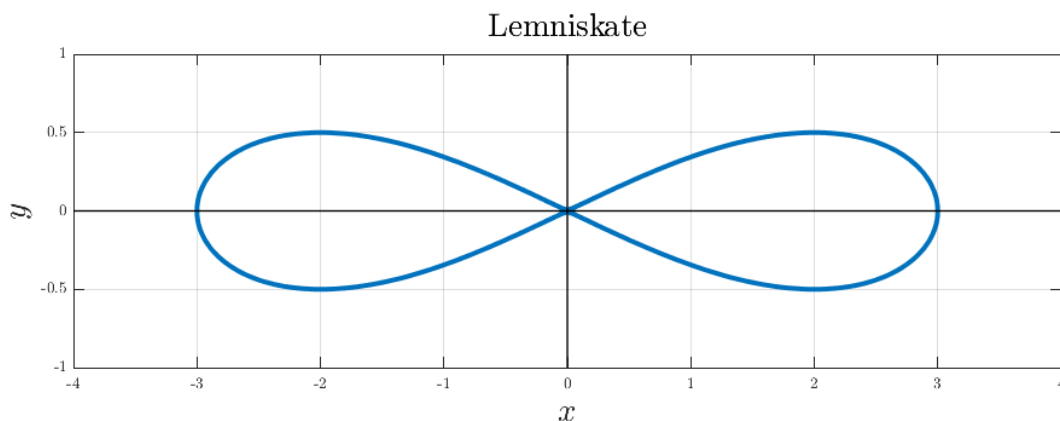
Betrachten Sie die Funktion

$$F(x, y) = (x^2 + 2y^2)^2 - 9(x^2 - 7y^2)$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Punktmenge

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}$$

beschreibt eine Lemniskate:



a) Zeigen Sie, dass die Lemniskate die Punkte

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(2, \frac{1}{2}\right), \quad P_3 = (3, 0)$$

enthält und untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob an diesen Punkten eine Darstellung mit einer Funktion $y = f(x)$ möglich ist.

b) Zeigen Sie für allgemeine implizite Funktionen $f(x)$, gegeben durch $F(x, f(x)) = 0$, dass die zweite Ableitung von f am Punkt (x_0, y_0) durch

$$f''(x_0) = - \frac{(\partial_y F)^2 \partial_{xx} F - 2 \partial_x F \partial_y F \partial_{xy} F + (\partial_x F)^2 \partial_{yy} F}{(\partial_y F)^3} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der impliziten Funktion $f(x)$ am Punkt P_2 der Lemniskate.

7 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \phi(x, y, z) = x + 2y - z$ zusammen mit den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8 = 0 \quad \text{und}$$

$$g_2(x, y, z) = x + z - 4 = 0$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extrema von ϕ unter den Nebenbedingungen g_1 und g_2 .
- b) Argumentieren Sie kurz, dass die zwei Kandidaten jeweils das Minimum und Maximum von ϕ unter den Nebenbedingungen g_1 und g_2 sind.

4.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Sei $\{P_c\}_{c>0}$ eine (Halb-)Parabelschar definiert durch

$$P_c = \{(x, y) : y = cx^2 \text{ mit } x, y > 0\}$$

wobei $x, y, c \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \quad x, y > 0,$$

deren Lösungen den (Halb-)Parabeln P_c entsprechen.

Hinweis: Dabei darf die rechte Seite $f(x, y)$ nicht von c abhängen. Eine eindeutige Trajektorie P_c wird über einen festen Anfangspunkt (x_0, y_0) bestimmt.

- b) Bestimmen Sie eine weitere Differentialgleichung, deren Lösungen den Orthogonal-Trajektorien zu $\{P_c\}_{c>0}$ entsprechen.

Hinweis: Zwei Trajektorien mit Steigungen $f(x, y)$, bzw. $g(x, y)$ sind orthogonal zueinander, wenn deren Tangentialvektoren $t_f = (1, f(x, y))^T$ und $t_g = (1, g(x, y))^T$ zueinander orthogonal sind. Also $t_f \cdot t_g = 0$.

- c) Lösen Sie die in b) bestimmte Differentialgleichung für eine feste Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wobei $x_0, y_0 > 0$.

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{1}{3}x(y(x))^3.$$

- a) Sei $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}xy^3$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Ist f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ auch global Lipschitz-stetig in y ?
- b) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ durch Separation der Variablen.
- c) Zeigen Sie, dass diese Lösung nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und begründen Sie warum das nicht der Aussage von Picard-Lindelöf widerspricht?

5.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}u_1' &= u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= -3u_1 - 4u_2\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}u &= (u_1, u_2)^T \\ u' &= Au \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.\end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung an, die

$$u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

b) Sei $y'(t) = f(t, y)$ eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit

$$f(t, y) = \frac{1}{ty}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ mit $y(e) = 1$.

5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben seien die Daten (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, 2$.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	5	0	-10

- a) Geben Sie das Newton'sche Interpolationspolynom $p_2(x)$ an, welches die Daten interpoliert.
- b) Geben Sie den absoluten Fehler der Interpolation an der Stelle $x = 2$ an. Die Funktion $f \in C^3([0, 3])$ soll dabei beliebig sein.
- c) Geben sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$ an.

3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x) dx + c_0 h^2 + c_1 h^4$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h . Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q(\frac{h}{3})$. Kombinieren Sie die Auswertungen, sodass Sie eine Approximation $\tilde{Q}(h)$ mit höherer Fehlerordnung (> 2) an das Integral bekommen.

b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x) dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_1 an.

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

Wir betrachten für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ die Matrix und den Vektor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der LR-Zerlegung lösen.

Hinweis: Wer unsicher mit der Theorie aus a)-d) ist, kann Teil e) auch direkt lösen.

- a) Argumentieren Sie, dass in den Faktoren der LR-Zerlegung von A jeweils auch nur eine Nebendiagonale besetzt ist.
- b) Wir nehmen nun für die Faktoren der LR-Zerlegung von A den Ansatz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha_1 & 1 & & \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \beta_2 & \gamma_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \gamma_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix}$$

mit Einträgen $\{\beta_i\}_{i=1,\dots,n}$ und $\{\alpha_i, \gamma_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ an. Finden Sie zunächst Bedingungen für α_i, β_i und γ_i . Geben Sie nun explizite Ausdrücke für α_i, β_i und γ_i an.

Hinweis: Zeigen Sie ausgehend von den Bedingungen via vollständiger Induktion, dass $\beta_i = \frac{i+1}{i}$.

- c) Berechnen Sie für die gegebene rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ zunächst die Lösung $v \in \mathbb{R}^n$ für die gilt $Lv = b$.
- d) Berechnen Sie nun die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des Gleichungssystems $Ax = b$ indem sie $Rx = v$ lösen.
- e) Geben Sie für den Fall $n = 4$ die LR-Zerlegung und die Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ an.

7 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 10.

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$.
- b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.
- c) Lösen Sie mit Teilaufgabe (a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
- d) Berechnen Sie die Determinante von A .

Hinweis: Die Matrix L in der Cholesky-Zerlegung wird mithilfe der folgenden Formeln berechnet:

$$l_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad k = 1, \dots, n$$
$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right) / l_{kk} \quad \forall i \geq k+1$$

5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 11.

Gegeben sei das skalierte, lineare Gleichungssystem $DAx = Db$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

sowie das gestörte lineare Gleichungssystem $DA\tilde{x} = D\tilde{b}$. Dabei gilt $\|b - \tilde{b}\|_\infty \leq 10^{-2}$.

- Schätzen Sie den relativen Fehler $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ für $\alpha = 1$ ab.
- Zeigen Sie, dass für $0.5 < \alpha < 1.0$ der Fehler kleiner abgeschätzt werden kann, als für $\alpha = 1$.

3.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 12.

Gegeben sei die Funktion $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \frac{xe^{-x}}{2} + 1.$$

- a) Zeigen Sie mithilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass $\phi(x)$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ genau einen Fixpunkt hat.
- b) Geben Sie mithilfe einer a-priori Fehlerschätzung die Anzahl der Iterationen an, die man mindestens benötigt um den Fixpunkt x^* mittels Fixpunktiteration $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ ausgehend von $x^{(0)} = 0$ bis auf einen Fehler von $\leq 2^{-5}$ zu bestimmen.

6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b(x) - y \end{pmatrix}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

- Finden Sie die analytische Lösung für $f(x, y) = 0$
- Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x, y) = (1, 1)$. Was beobachten Sie?
- Zeigen Sie für einen beliebigen Startwert (x_0, y_0) und eine beliebige differenzierbare Funktion $b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.
- In wievielen Schritten konvergiert das Newton-Verfahren für die 3D-Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \\ g_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ b(x, y) - z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} h_1(x, y, z) \\ h_2(x, y, z) \\ h_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b_1(x) - y \\ b_2(y) - z \end{pmatrix}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sowie $b_1, b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
(keine Rechnung erforderlich).

6.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 14.

Die Funktion $f(x) = a \sin(x + \gamma) + c \frac{x}{\pi}$ soll an die Messwerte

x_i	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f_i	3	-1	0	1

angepasst werden.

- a) Formulieren Sie das äquivalente lineare Ausgleichsproblem.

Hinweis: $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$

- b) Formulieren Sie das Problem mit Hilfe der Normalengleichungen.

- c) Geben Sie a, c, γ an.

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

Wir betrachten für einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, v \rangle = v^T v = 1$ die Matrix

$$H = I - 2vv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dabei ist $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$H^{-1} = H^T = H$$

b) Welche Dimension hat der Unterraum $U_v = \{u \in \mathbb{R}^n, \langle u, v \rangle = 0\}$ für den gegebenen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$? Wie kann man die den Raum U_v geometrisch interpretieren?

c) Zeigen Sie, dass für den gegebenen Einheitsvektor v gilt

$$Hv = -v.$$

d) Zeigen Sie, dass für alle $u \in U_v$ gilt

$$Hu = u.$$

e) Geben Sie alle Eigenwerte von H an und berechnen Sie die Determinante $\det(H)$.

f) Berechnen Sie den Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^4$, der für die erste Householder-Reflektion H einer QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

benötigt wird.

6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Viel Erfolg!