Prof. Dr. M. Torrilhon
Vertr.-Prof. Dr. A. Rueda-Ramírez
Dr. G. Oblapenko
D. Doehring

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2024
Klausur | 30.08.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 26.09.2024 von 10:00-11:30 Uhr im SE 001 (1580|001) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4	3	7.5	5	2.5	4.5	4	3	4.5	2.5	4	3.5	3.5	4.5	4	60
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

(a) Sei

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

eine partiell differenzierbare Funktion. Geben Sie die Definitionen von

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$$

an wobei $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ ist.

(b) Zeigen Sie die Beziehung

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$$

für die speziellen Vektorfelder

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3(x, y) \end{pmatrix}.$$

(c) Die Divergenz einer Matrix-Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ist spaltenweise definiert, d.h.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} F_1(\mathbf{x}) + ... + \partial_{x_d} F_d(\mathbf{x})$$

wobei $F_i(\mathbf{x})$ mit $i = 1, 2, ...d$ die Spalten von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sind.
Betrachten Sie für $d = 2$ die Funktionen $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (U_1(x, y), ...U_n(x, y))^T$ und $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times 2}, U \to \mathbf{F}(U)$ und zeigen Sie, dass die Divergenz als

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(U(\mathbf{x})) = \mathbf{A}(U(x))\partial_x U(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(U(\mathbf{x}))\partial_y U(\mathbf{x})$$

geschrieben werden kann. Wie berechnen sich die Matrizen $\mathbf{A}(U)$ und $\mathbf{B}(U)$?

1+1.5+1.5 = 4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Gleichung

$$\exp(xy) - y^2 \cos(z) = 1\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung in einer Umgebung von $(x, y, z) = (0, 1, \pi/2)$ eindeutig nach z aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen

$$\partial_x z(0,1) \qquad \partial_y z(0,1).$$

2+1 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 + xy$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Lagrange Formalismus alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$.

c) Was sind die globalen Maxima und Minima von f auf der elliptischen Fläche $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$?

2+4+1.5 = 7.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme:

a) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(b) $y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1$

2+3 = 5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.
Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = \sin(t) - y.$$

(a) Sind die Voraussetzungen für die Konvergenz der Picarditeration erfüllt?

(b) Führen Sie zwei Schritte der Picarditeration mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ durch.

1+1.5 = 2.5 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben ist das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Vektorfunktion $(x(t), y(t))^T$

$$\begin{aligned} \tfrac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), y(t)) \\ \tfrac{dy(t)}{dt} &= g(x(t), y(t)) \end{aligned} \qquad (\star)$$

mit der rechten Seite

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x\,y \\ \alpha(x\,y - y) \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) ein Parameter ist.

a) Zeigen Sie, dass der konstante Vektor $(x(t), y(t))^T = (1, 1)^T$ eine Lösung des Systems ist.

b) Betrachten Sie die Abweichung

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass kleine Abweichungen $\widetilde{x}(t)$ und $\widetilde{y}(t)$ das ODE System

$$\begin{aligned} \tfrac{d\widetilde{x}(t)}{dt} &= -\widetilde{y}(t) \\ \tfrac{d\widetilde{y}(t)}{dt} &= \alpha\,\widetilde{x}(t) \end{aligned} \qquad (\blacklozenge)$$

erfüllen in dem Sie $x(t) = 1 + \varepsilon\,\widetilde{x}(t)$ und $y(t) = 1 + \varepsilon\,\widetilde{y}(t)$ mit $\varepsilon > 0$ in das System ($\star$) einsetzen und Terme $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigen.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung für $\widetilde{x}(t)$ und $\widetilde{y}(t)$ sodass ($\blacklozenge$) erfüllt ist in Matrix-freier Form an! Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung periodisch ist und geben sie die Kreisfrequenz an, mit der die Lösung periodisch ist.

d) Zeigen Sie, dass entlang von Lösungen $(x(t), y(t))^T$ des vollen Systems ($\star$) mit $x(t) > 0$ und $y(t) > 0$ die skalare Funktion

$$A(x, y) = y - \ln y + \alpha(x - \ln x)$$

konstant ist. Zeigen Sie ausserdem, dass $A(x, y)$ konvex ist und bei $(x, y) = (1, 1)$ ein Minimum hat.

0.5+1+1.5+1.5 = 4.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

a) In einer numerischen Simulation werden Funktionswerte $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ einer Funktion f an den Stellen x_0, x_1, x_2 berechnet. Geben Sie die expliziten Formel einer Newton-Interpolation zur Approximation der Funktion $f(x)$ und zur Approximation der Ableitung $f'(x)$ an.

b) Seien nun die folgenden Funktionswerte gegeben.

i	0	1	2
x_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y_i	2	3	1

Berechnen Sie die Newton-Approximation von $f(0)$ und $f'(0)$.

c) Angenommen die Funktion f ist dreimal stetig differenzierbar. Geben Sie einen Ausdruck für den Interpolationsfehler für $f(0)$ mit den Funktionswerten aus b) an!

1.5+2+0.5 = 4 Punkte

Aufgabe 8.

a) Finden Sie eine Quadraturformel für f im Bereich $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Q[f] = \frac{1}{2}f(x_1) + a_1 f(0) + \frac{1}{2}f(x_2)$$

mit maximalem Genauigkeitsgrad. Die Koeffizienten dabei sind x_1, x_2 und a_1. Welchen Genauigkeitsgrad hat diese Quadraturformel?

b) Welchen Genauigkeitsgrad hätte eine Gauss-Quadratur mit 3 Stützstellen?

2.5+0.5 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

Die Gauss-Lobatto Quadraturformeln mit n Stützstellen haben die Form

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n(n-1)}(f(1)+f(-1)) + \sum_{j=2}^{n-1} w_j f(x_j) + R_n, \quad n \geq 2$$

mit inneren Stützstellen x_j und Gewichten w_j für $j = 2, \dots, n-1$, sowie einem Fehler/Residualterm R_n. Im Gegensatz zur Gauss-Quadratur sind hier die Randwert des Integrationsintervalls als Stützstellen explizit berücksichtigt.

a) Zeigen Sie, dass Monome von beliebigem ungeradem Grad für alle $n \geq 2$ exakt integriert werden, wenn die Stützstellen und Gewichte (w_j, x_j) symmetrisch um den Ursprung $x = 0$ angeordnet sind. Was bedeutet dies für die Integration von Polynomen, die nur Monome von ungeradem Grad beinhalten?

b) Berechnen Sie die Quadraturformel für $n = 3$ mit maximalem Genauigkeitsgrad.

> **Hinweis:** Sie dürfen annehmen, dass die Stützstellen und Gewichte symmetrisch um den Ursprung gewählt werden können.

2.5+2 = 4.5 Punkte

Aufgabe 10.

Mit dem Cholesky-Verfahren wird eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in eine normierte linke untere Dreiecksmatrix L und deren Transponierten L^T (normierte obere rechte Dreiecksmatrix) zerlegt, sodass

$$A = L\,D\,L^T. \tag{1}$$

Außerdem sei $D = \text{diag}\,(D_{11},\ldots,D_{nn})$ eine Diagonalmatrix mit $D_{ii} > 0$, $i = 1,\ldots,n$.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A symmetrisch positiv definit ist.

   Hinweis: Die Matrix L^T ist invertierbar.

b) Eine Cholesky-Zerlegung ist hilfreich zum Lösen von linearen Gleichungssystemen der Form $Ax = b$, mit A symmetrisch positiv definit. Das lineare Gleichungssystem soll gelöst werden durch:

   - Löse $L\,y = b$ mittels Vorwärtssubstitution
   - Löse $L^T\,x = D^{-1}\,y$ mittels Rückwärtssubstitution

   Vervollständigen Sie die Routine `function [x,y] = LoeseVorRueck_spd(L,D,b,n)`, wobei die Outputvariablen $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ sind, und die Inputvariablen $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $n \in \mathbb{N}$ sind. Sie können jede beliebige Programmiersprache oder Pseudo-Code verwenden.

```
function [x,y] = LoeseVorRueck_spd(L,D,b,n)

    % Initialisiere Spaltenvektoren x und y
    x = zeros(n,1);
    y = zeros(n,1);

    % Löse Ly=b durch Vorwärtssubstitution

    % TODO %

    % Löse Rx=D^-1y durch Rückwärtssubstitution

    % TODO %

end %function
```

1+1.5 = 2.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 11.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\mathsf{cond}_\infty A$ bezüglich der ∞-Norm.

b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D = \mathsf{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^{2} |a_{i,j}|, i = 1, 2$.

c) Bestimmen Sie nun die Kondition $\mathsf{cond}_\infty C$ bezüglich der ∞-Norm.

1.5+1+1.5 = 4 Punkte

Aufgabe 12.

Gesucht ist die Näherungslösung des Gleichungssystems

$$x_1 = \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2), \quad 3x_2 = e^{-x_1 - x_2}$$

a) Schreiben Sie zunächst das Gleichungssystem als Fixpunktiteration und zeigen Sie, dass

$$\|\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{y})\|_\infty \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty$$

mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in [0, 1]^2$ und $L < 1$ gilt.

> **Hinweis:** Berechnen Sie $D\Phi$ und zeigen Sie dass $\|D\Phi\|_\infty < 1$.

b) Geben Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Iterationen k an, für die der Fehler $\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(*)}\|_\infty \leq \frac{1}{64}$ ist, ausgehend von Startwert $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 0)^T$!

> **Hinweis:** Nehmen Sie an, dass alle Voraussetzungen für den Satz von Banach erfüllt sind.

2+1.5 = 3.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Zur Berechnung des Kehrwerts $\frac{1}{a}$ einer Zahl $a \neq 0$ kann man die Nullstelle der Funktion

$$F(x) := \frac{1}{x} - a$$

suchen.

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens für diese Funktion F an.

b) Berechnen Sie ausgehend von $a = 4$, $x_0 = 1$ die Werte x_1 und x_2.

c) Berechnen Sie ausgehend von $a = 4$, $x_0 = \frac{1}{8}$ die Werte x_1 und x_2.

d) Angenommen, Sie haben einen passenden Startwert x_0 gegeben. Welche der vier Grundrechenarten ($+$,$-$,$\cdot$,$\div$) werden benötigt um $\frac{1}{a}$ näherungsweise zu bestimmen?

1+1+1+0.5 = 3.5 Punkte

Aufgabe 14.

Bei einem Kletterunfall ist ein Dozent dieser Lehrveranstaltung vom Felsen gestürzt. Seine Sportuhr hat die folgenden Höhen (y) und Zeiten (t) erfasst:

i	1	2	3
t_i[s]	$1/3$	$2/3$	1
$y(t_i)$[m]	$40/9$	$25/9$	0

Es sei die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(t) = c_1 + c_2 t^2.$$

Die Parameter c_1 und c_2 sollen so bestimmt werden, dass die Werte in der Tabelle möglichst gut approximiert werden.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.

c) Was ist das Residuum vom linearen Ausgleichsproblem?

1+2+1.5 = 4.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

Erklären Sie jeweils stichpunktartig: QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt und QR-Zerlegung mit Householder-Transformationen. Welche Vorteile und Nachteile haben die beiden Methoden?

4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!