Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Vertr.-Prof. Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Tamme Claus
Eda Yilmaz

Applied and Computational Mathematics

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2023
Klausur | 21.08.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 04.09.2023 von 10:00-12:00 Uhr im H05 1385|105 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	4	3	4	3	3	3	3	3	4	3	4.5	2	3.5	4	50
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sind die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2 + y - \log z$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ \exp x \\ \sin y \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f und g.

b) Konstruieren Sie die verknüpfte Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto h(x,y) = f\left(g(x,y)\right)$$

c) Berechnen Sie den Gradienten von h einmal direkt und durch die Verwendung des Ergebnisses in (a).

d) Wie lautet die Hesse-Matrix von h? Ist die Funktion h bei $(x,y) = (0, \pi/2)$ konvex?

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

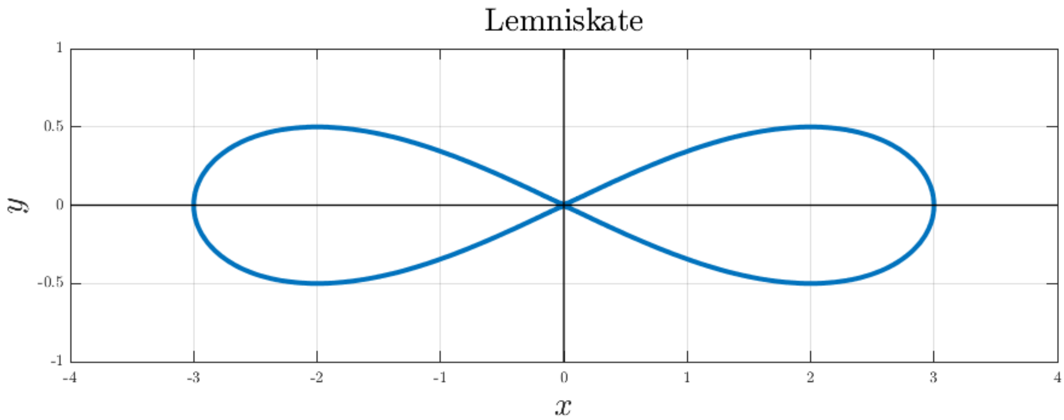
Betrachten Sie die Funktion

$$F(x,y) = (x^2 + 2y^2)^2 - 9(x^2 - 7y^2)$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Punktmenge

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = 0\}$$

beschreibt eine Lemniskate:



a) Zeigen Sie, dass die Lemniskate die Punkte

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = \left(2, \frac{1}{2}\right)\ P_3 = (3,0)$$

enthält und untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob an diesen Punkten eine Darstellung mit einer Funktion $y = f(x)$ möglich ist.

b) Zeigen Sie für allgemeine implizite Funktionen $f(x)$, gegeben durch $F(x, f(x)) = 0$, dass die zweite Ableitung von f am Punkt (x_0, y_0) durch

$$f''(x_0) = -\left.\frac{(\partial_y F)^2 \partial_{xx} F - 2\partial_x F \partial_y F \partial_{xy} F + (\partial_x F)^2 \partial_{yy} F}{(\partial_y F)^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der impliziten Funktion $f(x)$ am Punkt P_2 der Lemniskate.

4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \phi(x, y, z) = x + 2y - z$ zusammen mit den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8 = 0 \quad \text{und}$$
$$g_2(x, y, z) = x + z - 4 = 0$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extrema von ϕ unter den Nebenbedingungen g_1 und g_2.

b) Argumentieren Sie kurz, das die zwei Kandidaten jeweils das Minimum und Maximum von ϕ unter den Nebenbedingungen g_1 und g_2 sind.

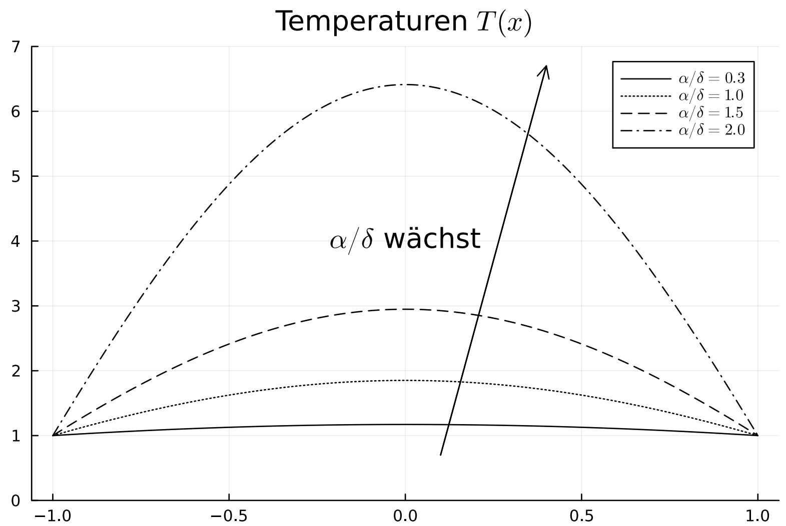
3 Punkte

Aufgabe 4.

Bei einem elektrischen Lichtbogen wirken im einfachsten Fall zwei physikalische Effekte auf das Temperaturfeld $T(x)$: Die Temperatur verteilt sich mit Leitfähigkeit δ and es wird mit dem Leistungskoeffizient α geheizt. Für einen ein-dimensionalen Querschnitt mit $x \in [-1, 1]$ zwischen zwei Wänden gilt für die unbekannte Temperatur $T(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-\delta\, T''(x) = \alpha\, T(x)$$

wobei wir $\delta \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ annehmen. Für verschiedene Fälle sieht die Temperatur so aus



a) Berechnen Sie die Lösung $T(x)$ der ODE mit den Bedingungen

$$T'(0) = 0 \qquad \text{(Symmetrie)}$$
$$T(1) = 1 \qquad \text{(Randbedingung)}$$

für allgemeine Werte von δ, α.

b) Welchen Wert hat die Temperatur bei $x = 0$ in Abhängigkeit von δ und α? Welche Temperatur $T(0)$ gilt für $\alpha = 0$, d.h. ohne Heizung?

c) Für ein kritisches Verhältnis

$$\frac{\alpha}{\delta} = C_{\text{krit}}$$

ergibt sich für $T(0)$ ein unendlicher Wert (sog. *Blow-up*). Bestimmen Sie den kleinesten Wert C_{krit}?

d) Der Blow-Up entsteht durch die positive Rückkopplung: "Höhere Temperatur $\to$ Mehr Heizleistung". Berechnen Sie die Lösung der ODE ohne Rückkopplung (konstante Heizung)

$$-\delta\, T''(x) = \alpha$$

mit den Bedingungen aus (a). Welcher Wert ergibt sich hier für $T(0)$ in Abhängigkeit von δ und α?

4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Gegeben sei das AWP

$$y' = 2xy \quad \text{in } [a,b] \times \mathbb{R}, \quad y(0) = c. \tag{1}$$

a) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen der Picard-Lindelöf Iteration erfüllt sind und dass eine eindeutige Lösung des Problems (1) existiert.

b) Berechnen Sie explizit die ersten drei Picard-Lindelöf Iterationen y_0, y_1, y_2 des Problems (1).

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die n-te Picard-Lindelöf Iteration y_n des Problems (1) gilt:

$$y_n(x) = c \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad x \in [a,b].$$

Bestimmen Sie den punktweisen Limes der Picard-Lindelöf Iterationsfolge (y_n). Löst dieser Limes das Problem (1)?

3 Punkte

Aufgabe 6.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Gleichung

$$u' = Au \ \text{ mit } \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösung an, die

$$u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: bestimmen Sie mithilfe des charakteristischen Polynoms alle komplexen Lösungen der Gleichung und finden Sie dann geeignete Linearkombinationen für die reellen Lösungen.

c) Geben Sie Anfangswerte $y(0)$ und $y'(0)$ für (b) an, so dass die Lösung $y(t)$ der ersten Komponente $u_1(t)$ der konkreten Lösung aus (a) entspricht.

3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben seien die Daten (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, 2$.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	5	0	-10

a) Geben Sie das Newton'sche Interpolationspolynom $p_2(x)$ an, welches die Daten interpoliert.

b) Geben Sie den absoluten Fehler der Interpolation an der Stelle $x = 2$ an. Die Funktion $f \in C^3([0, 3])$ soll dabei beliebig sein.

c) Geben sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$ an.

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Berechnen sie das Integral

$$\int_{-2}^{3} x^2 \, \mathrm{d}x$$

a) analytisch,

b) mit Hilfe der Trapezregel,

c) mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration mit 2 Gaußpunkten

> **Hinweis:** Die Stützpunkte und Gewichte der Gauss-Legendre Interpolation mit 2 Gaußpunkten für $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{2} w_i f(x_i)$ sind:
>
> $$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad w_1 = 1 \quad w_2 = 1$$

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

a) Benutzen Sie Interpolation mit einem linearen Polynom, um die Gewichte in der interpolatorischen Quadraturformel

$$Q\left[\int_{-1}^{1} f(x)dx\right] = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

mit $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ zu bestimmen. Welchen Genauigkeitsgrad hat diese Quadraturformel?

b) Welchen Genauigkeitsgrad hätte eine Gauss-Quadratur mit 2 Stützstellen?

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 10.

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -12 \\ -3 & 0 & -14 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Matrizen P, L und R aus Aufgabenteil (a).

4 Punkte

Aufgabe 11.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon^2 \end{pmatrix}$ mit $0 < \epsilon \ll 1$.

a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A in der 1-Norm.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung von $Ax = b$ an, falls b gestört wird mit

$$||\Delta b|| \leq \epsilon ||b||.$$

c) Was muss $||\Delta b||$ erfüllen, damit $Ax = b$ auch für $\epsilon \to 0$ stabil gelöst werden kann?

3 Punkte

Aufgabe 12.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) = e^x - 2.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ zwei Fixpunkte hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[-2, -1]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

c) Geben Sie eine Fixpunktiteration an, welche gegen den anderen Fixpunkt von Φ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen für die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts im Interval $[1, 2]$ gegeben sind.

Hinweis: Benutzen Sie den Logarithmus und nutzen Sie die Ungleichungen $\log(3) > 1$ und $\log(4) < 2$.

4.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Finden Sie eine Approximation $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ zur Lösung des nichlinearen Gleichungssystems

$$f_1(x_1, x_2) = 7x_1 - \cos(x_1) - 2x_2 = x_1$$

$$f_2(x_1, x_2) = 9x_2 - x_1 x_2^2 - \sin(x_1) = x_2$$

indem Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durchführen.

2 Punkte

Aufgabe 14.

Die Funktion $f(x) = a\,\mathsf{sin}(x+\gamma) + c\frac{x}{\pi}$ soll an die Messwerte

x_i	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f_i	3	-1	0	1

angepasst werden.

a) Formulieren Sie das äquivalente lineare Ausgleichsproblem.

Hinweis: $\mathsf{sin}(\alpha+\beta) = \mathsf{sin}(\alpha)\,\mathsf{cos}(\beta) + \mathsf{cos}(\alpha)\,\mathsf{sin}(\beta)$

b) Formulieren Sie das Problem mit Hilfe der Normalengleichungen.

c) Geben Sie a, c, γ an.

3.5 Punkte

Aufgabe 15.

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das Ergebnis $A^{(1)}$ nach dem ersten Schritt einer QR-Zerlegung mit Householder-Reflexionen an.

b) Wie lautet die Householder-Reflexion $H^{(2)} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ für den zweiten Schritt?

Hinweis: Nehme $\mathrm{sgn}(0) = 1$ an.

4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!