Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle
Ullika Scholz
Vladimir Đorđić

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2022
Klausur | 03.08.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 12.08.2022 von 09:00-11:00 Uhr im klPhys (1090|334) im Rogowski Gebäude in der Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	2.5	3	5	3.5	2.5	4	3.5	3.5	4	2.5	2.5	4	3	3.5	50
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und geben Sie die entsprechende Jacobimatrix an.

(1.1) $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.

(1.2) $g(x, y, z) = e^{xy}(x + yz)$.

(a) Sei f eine Abbildung von $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Zeigen Sie:
Für alle $(x, y) \in A$ gilt

$$|f(x, y)| \leq 4\|(x, y)\|_2,$$

wobei $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geben Sie weiterhin die stetige Fortsetzung von f in dem Punkt $(0, 0)$ an.

Hinweis: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 2.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) := \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ einen Fixpunkt im Intervall $[-\pi/2, \pi]$ hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[0, \pi/2]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

1+1.5 Punkte

Aufgabe 3.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 6x^2 + 12xy - 5y^2$$

Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest, ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y + 1)^2$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - 3x\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

mit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Skizzieren Sie das zugehörige 2-dimensionale Phasenportrait in den Richtungen y_1, y_2.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung an und lösen Sie danach das AWP $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Wie hängt die Lösung des AWP mit dem Phasenportrait zusammen? Verdeutlichen Sie Ihre Antwort durch Skizzieren im Phasenportrait.

2+1+1+1 Punkte

Aufgabe 5.

Sei $f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ auf $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Menge aller globalen Maxima und Minima.

b) Bestimmen Sie in jedem globalen Optimum das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2[f](x, y)$.

2.5+1 Punkte

Aufgabe 6.

Begründen Sie, dass zum folgenden AWP

$$y' - \frac{y}{t} = t \quad \text{für } t \in [1, \infty), \qquad y(1) = 1$$

die Lösung eindeutig bestimmt ist und berechnen Sie diese.

1+1.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	1	2	3
f_i	1	2	0	1

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel.

b) Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(-1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema.

2+2 Punkte

Aufgabe 8.
Sei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\, dx.$$

(a) Berechnen Sie eine Näherung von I mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

(b) Berechnen Sie eine Näherung von I mit Hilfe der Trapezregel.

(c) Berechnen Sie eine Näherung von I mit Hilfe der summierten Trapezregel, wobei Sie das Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

  (i) in drei äquidistante Teilintervalle zerlegen,

  (ii) in vier äquidistante Teilintervalle zerlegen.

(d) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der summierten Simpson-Regel, wobei das Intervall nicht in Teilintervalle zerlegt werden soll, d.h. $N = 1$.

(e) Für welches Ergebnis erwarten Sie den kleinsten Fehler und warum? Schätzen Sie die Fehler der Trapezregel, der summierten Trapezregel und der Simpsonregel ab.

0.5+0.5+1+0.5+1 Punkte

Aufgabe 9.

a) Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-2, 2]$ mit zwei Stützstellen x_0, x_1 der Form

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f'(x_1),$$

wobei $x_0 = -1$ vorgegeben ist. Bestimmen Sie c_0, c_1 und x_1 so, dass der Genauigkeitsgrad möglichst groß wird.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler an.

2.5+1 Punkte

Aufgabe 10.

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit dem Vektor $b = (1, 0, \cdots 0)^T \in \mathbb{R}^n$ und wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der LR-Zerlegung lösen.

Tipp: Wer unsicher mit der Theorie aus (a)-(c) ist, kann Teil (d) auch direkt ausrechnen.

(a) Argumentieren Sie, dass in den Faktoren der LR-Zerlegung jeweils auch nur eine Nebendiagonale besetzt ist.

(b) Machen Sie für die Faktoren der LR-Zerlegung den Ansatz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_1 & 1 & & & \\ & \alpha_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \gamma_{n-1} \\ & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

mit unbekannten Einträgen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ für $i = 1, 2, \ldots$ Zeigen Sie, dass aus $LR = A$ unter anderem die Bedingungen

$$\alpha_i \beta_i = -1, \quad \gamma_i = -1$$

folgen und berechnen Sie mit den übrigen Bedingungen einen expliziten Ausdruck für $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

(c) Berechnen Sie für die oben gegebene rechte Seite b zuerst einen allgemeinen Ausdruck für die Lösung $L\widetilde{b} = b$ mit $\widetilde{b} = \left(\widetilde{b}_i\right)^T_{i=1,\ldots n}$ und dann die allgemeine Lösung $x = (x_i)^T_{i=1,\ldots n}$ von $Rx = \widetilde{b}$.

(d) Geben Sie für den Fall $n = 4$ die LR-Zerlegung und die Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ an.

1.5+0.5+1+1 Punkte

Aufgabe 11.

Aufgabenstellung Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} := \begin{pmatrix} 2 & \pm\varepsilon \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sie lösen statt $Ax = b$ das LGS $\widetilde{A}x = b$. Wie groß darf ε höchstens sein, damit der relative Fehler in x kleiner als 10^{-2} in der 2-Norm und inf-Norm ist? Geben Sie die Antwort, ohne x zu berechnen.

Hinweis: Sie dürfen Satz 3.9 aus Dahmen & Reusken benutzen:

Es gelte $\kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$. Sei $x + \Delta x$ die Lösung von

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Dann gilt:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

2.5 Punkte

Aufgabe 12.

Gesucht ist die Näherungslösung des Gleichungssystems

$$x_1 = \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2), \quad 3x_2 = e^{-x_1-x_2}$$

a) Schreiben Sie zunächst das Gleichungssystem als Fixpunktiteration und zeigen Sie, dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$$

mit $x, y \in [0,1]^2$ und $L < 1$ gilt.

Tipp: Berechnen Sie $D\Phi$

b) Wie viele Iterationen werden für einen Fehler $\|x^{(k)} - x^{(*)}\|_\infty \leq \frac{1}{64}$ benötigt, wenn man den Startwert $x^{(0)} = (0,0)^T$ verwendet?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass alle Voraussetzungen für den Satz von Banach erfüllt sind.

1.5+1 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ b(x)-y \end{pmatrix} \end{cases}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

a) Finden Sie die analytische Lösung für $f(x,y) = 0$

b) Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x,y) = (1,1)$. Was beobachten Sie?

c) Zeigen Sie für einen beliebigen Startwert (x_0, y_0) und eine beliebige differenzierbare Funktion $b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.

0.5+2+1.5 Punkte

Aufgabe 14.

Um die *Black Box* eines über dem Meer verunglückten Flugzeugs zu finden, werden fünf Suchboote eingesetzt. Mithilfe dieser Boote soll über das von der *Black Box* ausgesendete Notsignal ihr Standort ermittelt werden. In der nachfolgenden Tabelle sind die Positionen (x_i, y_i) der Suchboote $i = 1, ...5$ in einem (x, y)-Koordinatensystem angegeben. Zusätzlich ist für jedes Boot der Tangenswert des Richtungswinkels α bezüglich eines Koordinatensystems zentriert bei (x_i, y_i) gegeben, aus dem es das Notsignal empfängt.

Suchboot	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
x_i	8	22	36	10	13
y_i	0	7	18	20	10
$\tan \alpha_i$	1	-0.5	0.5	-1	0

(a) Stellen Sie die Situation graphisch dar, wobei Sie $\arctan(\pm 1) = \pm 45^\circ$ $\arctan\left(\pm\frac{1}{2}\right) \approx \pm 26.5^\circ$ verwenden können.

(b) Stellen Sie das lineare Ausgleichspoblem für die unbekannte Position $(x^\star, y^\star)$ auf, wobei Sie die Relation $\tan \alpha_i = \frac{y^\star - y_i}{x^\star - x_i}$ benutzen.

(c) Lösen Sie das Problem mit den Normalengleichungen und zeichnen Sie die Position in Ihre Graphik ein.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 15.

Wir betrachten Householder-Matrizen in der Form

$$H = I_n - \frac{2}{\|v\|^2} v v^\top \ \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $v \in \mathbb{R}^n$.

a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -3 \\ a_2 & 6 \\ a_3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $v \in \mathbb{R}^3$ und $a = (a_1, a_2, a_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ s.d. $H^{(1)}A = A^{(1)}$ gilt.

> **Hinweis:** Es ist möglich eine Matrix mit $H^{(1)}A = A^{(1)}$ direkt zu identifizieren, überprüfen Sie dann, dass es sich bei der von Ihnen identifizierten Matrix um eine Householder-Matrix handelt. Alternativ: Berechnen Sie zunächst v und nutzen Sie anschließend diese Information, um daraus a zu bestimmen.

b) Es wird nun auf der zweiten Spalte der Matrix $A^{(1)}$ eine weitere Householder-Transformation durchgeführt, so dass $A^{(2)} = H^{(2)}A^{(1)}$ mit

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Bestimmen Sie den hierzu passenden Vektor v.

2.5+1 Punkte

Name: Matriculation-Nr.: