Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Dr. Stefanie Braun
Paul Wilhelm, M.Sc.
Tuan Vo, M.Sc.

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2021
Klausur | 09.08.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 20.08.2021 von 09:00–11:30 Uhr im klPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	6	6	7	11	6	8	4	5	10	6	4	7	8	5	7	100
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Berechnen Sie jeweils den Gradient, die allgemeine Richtungsableitung und die Hesse-Matrix folgender Funktionen:

a) Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}$$

in Richtung $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^\top \in \mathbb{R}^2$.

b) Für die Verkettung $h = g \circ f$ mit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos x \\ e^x \\ x \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x, y, z) = xye^z$$

und Richtung $v = (1, 1)^\top \in \mathbb{R}^2$.

c) Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \alpha \sin\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R},\ (a_i)_{i=1,\ldots n} \in \mathbb{R}^n$$

mit Richtung $v \in \mathbb{R}^n$.

2+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

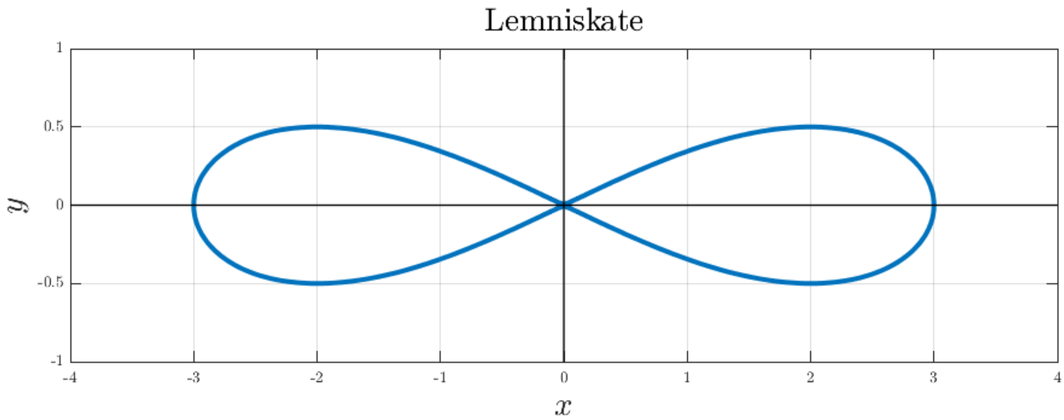
Betrachten Sie die Funktion

$$F(x,y) = (x^2+2y^2)^2 - 9(x^2-7y^2)$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Punktmenge

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = 0\}$$

beschreibt eine Lemniskate:



a) Zeigen Sie, dass die Lemniskate die Punkte

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = \left(2, \frac{1}{2}\right)\ P_3 = (3,0)$$

enthält und untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob an diesen Punkten eine Darstellung mit einer Funktion $y = f(x)$ möglich ist.

b) Zeigen Sie für allgemeine implizite Funktionen, gegeben durch $F(x, f(x)) = 0$, dass die zweite Ableitung von f am Punkt (x_0, y_0) durch

$$f''(x_0) = -\frac{(\partial_y F)^2 \partial_{xx} F - 2\partial_x F \partial_y F \partial_{xy} F + (\partial_x F)^2 \partial_{yy} F}{(\partial_y F)^3}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der impliziten Funktion $F(x)$ am Punkt P_2 der Lemniskate.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 3.
Sei $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^4 + y^4 = 1\}$ die Menge aller Punkte auf einem „Superkreis“.

a) Bestimmen Sie alle Punkte auf der Menge $\mathcal{M}$ mit extremalem Abstand zum Ursprung mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren.
Hinweis: Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{M}$.

b) Berechnen Sie den minimalen und maximalen Abstand der Punkte auf der Menge $\mathcal{M}$ zum Ursprung.

5+2 Punkte

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

(i) $\dot{x} = 10^{t+x}$,

(ii) $\dot{x} = \sqrt{4t + 2x - 1}$,
Hinweis: Die Angabe einer impliziten Lösung $F(t, x(t)) = 0$ ist hinreichend.

(iii) $t\dot{x} = e^x + 2\dot{x}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x^2 y(x) + x^2, \qquad y(0) = 2.$$

Nehmen Sie an, dass $y(x) > -1$ gilt.

(i) Lösen Sie die Differentialgleichung über Separation der Variablen.

(ii) Lösen Sie die Differentialgleichung über Variation der Konstanten.

7+4 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{1}{3}x(y(x))^3.$$

a) Sei $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}xy^3$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Ist f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ auch gleichmäßig Lipschitz-stetig in y?

b) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ durch Separation der Variablen.

c) Zeigen Sie, dass diese Lösung nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und begründen Sie warum das nicht der Aussage von Picard-Lindelöf widerspricht?

2+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Gegeben sind eine Matrix A und ein Vektor y_0 mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \\ -8 & -8 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A die folgende Form hat:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 + 48\lambda,$$

und berechnen Sie die Eigenwerte.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$:

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0.$$

c) Gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = (1, 1, 1)^\top$ für die

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

gilt?

2+5+1 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben seien die folgenden Messwerte

i	0	1	2
x_i	-2	-1	1
f_i	-3	2	6

wobei f_i den Funktionswert an der Stützstelle x_i bezeichnet.

a) Geben Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in der Darstellung durch die Lagrange-Basis-Polynome an, welches f an den Stellen x_0, x_1, x_2 interpoliert.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville-Schemas den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 0$.

2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_0 h^2 + c_1 h^5$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{2}\right)$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, dass Sie eine genauere Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral bekommen.
Hinweis: Wie kann man $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{2}\right)$ addieren, sodass sich Terme niedriger Ordnung auslöschen?

b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_1 an.

4+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

Die Gauss-Lobatto Quadraturformeln mit n Stützstellen haben die Form

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n(n-1)}(f(1)+f(-1)) + \sum_{j=2}^{n-1} w_j f(x_j) + R_n$$

mit inneren Stützstellen x_j und Gewichten w_j für $j = 2, ...n-1$, sowie einem Fehlerterm R_n. Im Gegensatz zur Gauss-Quadratur sind hier die Randwert des Integrationsintervalls als Stützstellen explizit berücksichtigt.

a) Zeigen Sie, dass Monome von ungeradem Grad exakt integriert werden, wenn die Stützstellen und Gewichte (w_j, x_j) symmetrisch um den Ursprung angeordnet sind.

b) Berechnen Sie die Formeln für $n = 3$ und $n = 4$ mit maximalem Genauigkeitsgrad. Was vermuten Sie als Genauigkeitsgrad für den allgemeinen Fall?
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Stützstellen und Gewichte symmetrisch um den Ursprung gewählt werden können.

c) Berechnen Sie für $k = 0, 1, 2$ die orthogonalen Polynome $p_k(x)$ mit Grad k bezüglich des skalaprodukts
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)\,dx.$$
Als Normalisierung genügt $p_k(1) = 1$.

d) Die allgemeinen Gauss-Lobatto-Stützstellen sind die Nullstellen des Polynoms p_{n-2}. Überprüfen Sie diese Aussage für den Fall $n = 3$ und $n = 4$.

3+3+3+1 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit (SPD)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie zwei beliebige Methoden an, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, wobei die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

b) Geben Sie zwei beliebige Methoden an, um die Determinante der Matrix A auszuwerten, wobei die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

c) Bestimmen Sie die Matrix L mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$. Werten Sie danach die Determinante der Matrix A mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung aus.

1+1+4 Punkte

Aufgabe 11.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 2.8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumsnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

4 Punkte

Aufgabe 12.

Vorgelegt sei die Funktion

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \\ x \mapsto \phi(x) := xe^{-x} + 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ genau einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^+$ s.d.

$$\phi(x) = x.$$

Hinweis: Bestimmen Sie dazu ein geeignete Intervall, auf dem ϕ kontrahierend und selbstabbildend ist.

b) Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchtes benötigt, um mittels

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \qquad \text{ausgehend von} \qquad x_0 = 1,$$

der Fixpunkt x^* bis auf einen Fehler von 10^{-5} zu bestimmen. Verwenden Sie dabei eine allgemeine Kontraktionszahl K.

5+2 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ b(x)-y \end{pmatrix} \end{cases}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

a) Was ist die exakte Form der Lösung von $f(x,y) = 0$?

b) Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x,y) = (1,1)$. Was beobachten Sie?

c) Zeigen Sie für einen beliebigen Startwert (x_0, y_0) und eine beliebige differenzierbare Funktion $b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.

1+4+3 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei eine Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ t \mapsto f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die Parameter α, β und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
$f(t_i)$	1	2	2	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf

c) Lösen Sie die Normalengleichung mit einem geeigneten Verfahren.

d) Skizzieren Sie die Lösung inkl. der Messwerte.

1+1+2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.

Wir betrachten Householder-Matrizen in der Form

$$H = I_n - \frac{2}{\|v\|^2} v v^\top \; \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $v \in \mathbb{R}^n$.

a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 10 \\ a_3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 0 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $v \in \mathbb{R}^3$ und $a = (a_1, a_2, a_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ s.d. $H^{(1)} A = A^{(1)}$ gilt.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst v und nutzen Sie anschließend diese Information, um daraus a zu bestimmen.

b) Führen Sie auf der zweiten Spalte der Matrix $A^{(1)}$ eine weitere Householder-Transformation durch, so dass $A^{(2)} = H^{(2)} A^{(1)}$ mit

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 0 & -\sqrt{89} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

5+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Viel Erfolg!