Prof. Dr. Sebastian Noelle
Dr. Matthias Kirchhart

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2020
Klausur | 05.08.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 20.08.2020 von 08:00–10:00 Uhr im Sparkassenforum (1040|U234) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	6	6	6	7	6	5	12	9	4	6	7	8	7	6	5	100
Ihre Punkte																

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Beurteilen bzw. ergänzen Sie die folgenden Aussagen! Es gibt jeweils genau eine richtige Antwort.

a) Der Fehler $\max_{x\in[a,b]}|f(x) - Pf(x)|$ bei Approximationen einer Funktion f mithilfe von Interpolationspolynomen wird durch die Hinzunahme weiterer Stützstellen stets kleiner.

☐ Ja ☐ Nein

b) Sei f eine unendlich glatte Funktion mit Ableitungen, die alle durch die Zahl 10 beschränkt sind. Dann konvergiert Polynominterpolation auf den Tschebyshow-Knoten sehr schnell.

☐ Ja ☐ Nein

c) Polynominterpolation mit 1 000 000 äquidistanten Stützstellen ist stabil.

☐ Ja ☐ Nein

d) Gauß-Quadratur mit 1 000 000 Stützstellen ist stabil.

☐ Ja ☐ Nein

e) Numerisches Differenzieren ist anfällig gegenüber Auslöschung und/oder Störungen in den Daten.

☐ Ja ☐ Nein

f) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine wohl-konditionierte Matrix und n moderat groß. Sei $\tilde{x}$ die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, die man erhält, wenn man den Gauß-Algorithmus $PA = LR$ zur Lösung in Gleitkomma-Arithmetik anwendet. Dann ist die Lösung $\tilde{x}$:

☐ immer ☐ nicht immer, aber praktisch so gut wie immer
☐ manchmal ☐ im Allgemeinen nie

eine gute Näherung der exakten Lösung x.

g) Verwendet man stattdessen die QR-Zerlegung via Hausholder-Spiegelungen in Gleitkomma-Arithmetik, dann ist die Lösung $\tilde{x}$:

☐ immer ☐ nicht immer, aber praktisch so gut wie immer
☐ manchmal ☐ im Allgemeinen nie

eine gute Näherung der exakten Lösung x.

h) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit sehr schlechter Kondition, $\kappa(A) \approx 10^{300}$. Dann lässt sich die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$

☐ nur mit dem Gauß-Algorithmus ☐ nur mit dem QR-Verfahren
☐ mit beiden dieser Verfahren ☐ im Allgemeinen überhaupt nicht

gut in Gleitkomma-Arithmetik doppelter Genauigkeit ($\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$) berechnen.

i) Das lineare Ausgleichsproblem $\|A\theta - y\|_2 \to \min$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, hat **immer** Lösungen $\theta \in \mathbb{R}^n$:

☐ Ja ☐ Nein

j) Ein Gleichungssystem lässt sich immer als Nullstellenproblem auffassen.

☐ Ja ☐ Nein

k) Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann immer gegen die nächstgelegene Nullstelle.

☐ Ja ☐ Nein

l) Angenommen das Newton-Verfahren konvergiere gegen eine einfache Nullstelle einer glatten Funktion. Dann erhöht sich für gewöhnlich die Anzahl der korrekten Stellen in jedem Schritt ungefähr:

☐ um 2. ☐ um den Faktor 2.
☐ um 3. ☐ um den Faktor 3.

12×0,5 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-2	0	2	4
f_i	-1	1	3	1

a) Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom in der Newton-Basis.

b) Werten Sie das Polynom an der Stelle $x = 1$ aus.

5+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Finden Sie die Quadraturformel $Q(f)$ der Form:

$$Q(f) = w_0\, f(-1) + w_1\, f(x_1) + w_2\, f(1) \approx \int_{-1}^{1} f \,\mathrm{d}x$$

mit maximalem Exaktheitsgrad. Wie hoch ist dieser Grad?

b) Welchen Exaktheitsgrad hätte Gauß-Quadratur mit 3 Stützstellen/Quadraturpunkten?

Hinweis: Falls Sie das Gleichungssystem nicht lösen können, nehmen Sie $x_1 = 0$ an. Dafür wird Ihnen nur ein Punkt abgezogen.

5+1 Punkte

Aufgabe 4.
Zur Berechnung des Kehrwerts $\frac{1}{a}$ einer Zahl $a \neq 0$ kann man die Nullstelle der Funktion

$$F(x) := \frac{1}{x} - a$$

suchen.

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens für diese Funktion F an.

b) Berechnen Sie ausgehend von $a = 4$, $x_0 = 1$ die Werte x_1, x_2, und x_3. Was fällt Ihnen auf?

c) Berechnen Sie ausgehend von $a = 4$, $x_0 = \frac{1}{8}$ die Werte x_1,x_2 und x_3. Was fällt Ihnen auf?

d) Angenommen, Sie haben einen passenden Startwert x_0 gegeben. Welche der vier Grundrechenarten ($+$,$-$,$\cdot$,$\div$) werden benötigt um $\frac{1}{a}$ näherungsweise zu bestimmen?

Hinweis: Verwenden Sie Brüche, $15 \cdot 7 = 255$, $16 \cdot 64 = 1024$.

2+2+2+1 Punkte

Aufgabe 5.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung $A = LR$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4+2 Punkte

Aufgabe 6.

Anstatt des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

wird das gestörte System $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst, mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2{,}125 & 0{,}875 \\ 1 & 2{,}25 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 4{,}25 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Schätzung für den relativen Fehler

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

an, ohne x und $\tilde{x}$ explizit auszurechnen.

Hinweis: Sie können folgende Formel verwenden:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\tilde{A} - A\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \cdot \left(\frac{\|\tilde{A} - A\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right)$$

5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das folgende Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 5 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

(a) Lösen Sie das Problem über Givens-Rotationen oder Householder-Spiegelungen.

(b) Lösen Sie das Problem über die Normalengleichungen und eine Cholesky-Zerlegung. (Sowohl die Varianten LDL^T als auch $\tilde{L}\tilde{L}^T$ sind zulässig)

5+7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gesucht ist eine näherungsweise Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^3 + e^y &= -z^2, \\ -xy &= -\frac{1}{3}z^3, \\ -yx^3 + 6 &= -z(8 + x^3). \end{aligned}$$

a) Überführen Sie das oben gegebene nichtlineare Gleichungssystem in ein äquivalentes Nullstellenproblem.

b) Wenden Sie einen Iterationsschritt des Newton-Verfahrens zum Startwert $(1, 0, -1)^T$ auf das in Teil a) bestimmte Nullstellenproblem an.

1+8 Punkte

Aufgabe 9.
Sei

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto f(x,y) &:= \frac{1}{2}x^2+y^2-2|x|. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie an welchen Stellen die Funktion differenzierbar bzw. zweimal differenzierbar ist. Berechnen Sie dort alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

4 Punkte

Aufgabe 10.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}(x^2 + 2y)^3 + \exp(x - y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(\pi, 0)$.

6 Punkte

Aufgabe 11.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 6x^2 + 12xy - 5y^2$$

Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest, ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y + 1)^2$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - 3x\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.

3+4 Punkte

Aufgabe 12.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

a) $2y' + 4y = \mathrm{e}^{-3t}, \;\; y(0) = \frac{3}{2}.$

b) $y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

4+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= -2u_2(t), \\
u_2'(t) &= -2u_1(t), \\
u_3'(t) &= -\frac{7}{2}u_1(t) - \frac{7}{2}u_2(t) + 5u_3(t),
\end{aligned}
$$

a) Formulieren Sie dieses DGL-System als lineares System erster Ordnung der Form

$$y'(t) = Ay(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, y\colon I \to \mathbb{R}.$$

b) Finden Sie das Fundamentalsystem zu der ODE $y'(t) = Ay(t)$.

c) Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangswerte

$$u_1(0) = 1, \qquad u_2(0) = 1, \qquad u_3(0) = 1.$$

1+4+2 Punkte

Aufgabe 14.

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{1}{3}xy(x)^3$$

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}xy^3$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Ist f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ auch gleichmäßig Lipschitz-stetig in y ?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ durch Separation der Variablen.

(c) Zeigen Sie, dass diese Lösung nicht für alle Zeiten existiert und begründen Sie warum das nicht der Aussage von Picard-Lindelöf widerspricht?

3+1+2 Punkte

Aufgabe 15.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(\mathsf{exp}(x) - x)y = -(\mathsf{exp}(y) - 1)x$$

im Punkt $(0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

c) Ist die Gleichung in $(0, 0)$ auch nach x auflösbar?

3+1+1 Punkte