Prof. Dr. Benjamin Stamm
Dr. Alexander Litvinenko
Tuan Vo, M.Sc.
Mohsen Sadr, M.Sc.

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2019
Klausur | 24.07.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 02.08.2019 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	10	9	4	8	5	7	6	12	7	5	4	7	7	6	100
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass jede Funktion

$$u(x, y, t) = f(x - at)$$

die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u + a \frac{\partial}{\partial x} u = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

ist für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

3 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben seien zwei Zylinder

$$Z_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 1\right\},$$
$$Z_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Betrachten Sie die Schnittmenge $S = Z_1 \wedge Z_2$. Seien $p_1 = (1, 0, 1)$ und $p_2 = (0, 1, 0)$ mit $p_1, p_2 \in S$.

a) Existieren in einer Umgebung von p_1 die eindeutigen Funktionen $y(x), z(x)$?

b) Existieren in einer Umgebung von p_1 die eindeutigen Funktionen $x(y), z(y)$?

c) Existieren in einer Umgebung von p_2 die eindeutigen Funktionen $y(x), z(x)$?

d) Skizzieren Sie die Menge S schematisch und tragen Sie die Punkte p_1, p_2 ein.

3+2+2+3 Punkte

Aufgabe 3.
Sei $f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ auf $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

a) Bestimmen Sie die Menge aller globalen Maxima und Minima.

b) Bestimmen Sie in jedem globalen Optimum das Taylor-polynom zweiten Grades $T_2[f](x, y)$.

7+2 Punkte

Aufgabe 4.

Begründen Sie, dass zum folgenden AWP

$$y' - \frac{y}{t} = t \quad \text{für } t \in [1, \infty), \qquad y(1) = 1$$

die Lösung eindeutig bestimmt ist und berechnen Sie diese.

2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

mit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie danach das AWP $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4+4 Punkte

Aufgabe 6.

(1) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und geben Sie die entsprechende Jacobimatrix an.

(1.1) $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.

(1.2) $g(x, y, z) = e^{xy}(x + yz)$.

(2) Sei f eine Abbildung von $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Zeigen Sie:
Für alle $(x, y) \in A$ gilt

$$|f(x, y)| \leq 4\|(x, y)\|_2,$$

wobei $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geben Sie weiterhin die stetige Fortsetzung von f in dem Punkt $(0, 0)$ an.

Hinweis: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

2+3 Punkte

Aufgabe 7.

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-1}^{2} x^2 \, \mathrm{d}x$$

a) analytisch,

b) mit Hilfe der Mittelpunktsregel,

c) mit Hilfe der Trapezregel,

d) mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration mit 3 Gaußpunkten.

Hinweis: Die Stützpunkte x_i und Gewichte ω_i der Gauß-Legendre Integration mit 2 und 3 Gaußpunkten sind

$n = 2$	x_i	ω_i
1	$-1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	1

$n = 3$	x_i	ω_i
1	$-\sqrt{3}/\sqrt{5}$	$5/9$
2	0	$8/9$
3	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	$5/9$

1+1+1+4 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R

- entweder mit Hilfe der Givens-Rotation,
- oder mit Hilfe der Householder-Reflexionen,

so dass $A = QR$ gilt.

6 Punkte

Aufgabe 9.
Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	4	7
f_i	2	0	1	9

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit der Lagrangeschen Interpolationsformel.

b) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit der Newtonschen Interpolationsformel.

c) Gegeben sei $P_3(x) := P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$. Berechnen Sie

$$I = \int_0^1 P_3(x)dx.$$

5+5+2 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Funktion f durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) := \alpha + \beta \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \gamma \cos(t), \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die Parameter α, β und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

$(t_i)/\pi$	0	1	2	7
$f(t_i)$	1	9	9	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Bestimmen Sie die Matrix A und Vektor b des linearen Ausgleichsproblems.

b) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

c) Stellen Sie die Normalengleichung auf.

d) Lösen Sie die Normalengleichung mit einem geeigneten Verfahren.

e) Bestimmen Sie die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ des Residuums $r = b - Ax$.

3+1+1+1+1 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) := \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{3}{2}.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ einen Fixpunkt im Interval $[0, \pi]$ hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[0, \pi]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

2+3 Punkte

Aufgabe 12.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_0h^2 + c_1h^4$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{3}\right)$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, dass Sie eine genauere Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral bekommen.

b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_1 an.

3+1 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit (SPD)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie zwei beliebige Methoden an, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, wobei die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

b) Geben Sie zwei beliebige Methoden an, um die Determinante der Matrix A auszuwerten, wobei die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

c) Bestimmen Sie die Matrix L mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$. Werten Sie danach die Determinante der Matrix A aus.

2+2+3 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\mathsf{cond}_\infty A$ bezüglich der Zeilensummennorm.

b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D = \mathsf{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^{2} |a_{i,j}|,\ i = 1, 2$.

c) Bestimmen Sie nun die Kondition $\mathsf{cond}_\infty C$ bezüglich der Zeilensummennorm.

3+1+3 Punkte

Aufgabe 15.

Betrachten Sie die Abbildung f gegeben durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Injektivität der Abbildung f.

b) Führen Sie für die Abbildung f zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch.

c) Was könnte ein Flaschenhals des Newton-Verfahrens sein? Geben Sie eine Lösung, um den Flaschenhals des Newton-Verfahrens zu umgehen.

1+3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Viel Erfolg!