Prof. Dr. Benjamin Stamm
Professurvertreter Dr. Jan Giesselmann

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2018
Klausur | 31.07.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 31.08.2018 von 10:30–11:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	7	5	6	6	5	4	4	4	4	11	11	9	10	6	12	104
Ihre Punkte																

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	3
f_i	1	3	6

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel.

b) Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Neville-Aitken-Schema bei $x = 1$ aus.

4+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Benutzen Sie Interpolation mit einem linearen Polynom, um die Gewichte in der interpolatorischen Quadraturformel

$$Q\left[\int_{-1}^{1} f(x)dx\right] = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

mit $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ zu bestimmen. Welchen Genauigkeitsgrad hat diese Quadraturformel?

b) Welchen Genauigkeitsgrad hätte eine Gauss-Quadratur mit 2 Stützstellen?

4+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3$$

gilt. Hierbei sind c_1, c_2, c_3 Konstanten, die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

(a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$, $Q\left(\frac{h}{2}\right)$ und $Q\left(\frac{h}{4}\right)$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, dass Sie eine möglichst genaue Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral erhalten.

(b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_3 an.

5+1 Punkte

Aufgabe 4.
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$.

b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

c) Lösen Sie mit Teilaufgabe (a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

2+1+1+2 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\mathrm{cond}_1\, A$ bezüglich der Spaltensummennorm.

b) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens für den Startvektor $x^{(0)} = (1,1)^T$ und die rechte Seite $b = (8,7)^T$ durch.

c) Konvergiert das Jacobi-Verfahren für diese Systemmatrix A und rechte Seite b.

2+2+1 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) := \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ einen Fixpunkt im Interval $[-\pi/2, \pi]$ hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[0, \pi/2]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

1+3 Punkte

Aufgabe 7.

Sei $f \in C^{m+1}$, $m > 1$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}$ eine m-fache Nullstelle von f, d.h.

$$f^{(j)}(\bar{x}) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1; \quad f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass das modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

lokal mindestens quadratisch gegen $\bar{x}$ konvergiert.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha \cos^2(t) + \gamma \sin^4(t),\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3
t_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f(t_i)$	1	2	6

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.

2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

Gegeben sei das Ausgleichsproblem, das durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ definiert wird.}$$

Bestimmen Sie mittels Householder–Transformation eine QR–Zerlegung von A (ohne explizites Berechnen von Q).

4 Punkte

Aufgabe 10.

Betrachte die Abbildung $f : [0,\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Bild der Abbildung f. Ist die Abbildung injektiv?

b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $h := g \circ f$ an.

c) Betrachten Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ durch

(i) direktes der Funktion h, und

(ii) Anwendung der Keffenregel.

3+3+5 Punkte

Aufgabe 11.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 e^y + y^2 \cos(2\pi x).$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f und die Hesse-Matrix.

b) Berechnen sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 um der Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

3+3+5 Punkte

Aufgabe 12.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)(y + 2).$$

Ziel ist es die Extremalstellen in $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ zu bestimmen.

a) Bestimmen Sie die Minima und Maxima von f in $\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$. Bestimmen Sie ob es jeweils ein global oder lokales Extremum ist.

b) Bestimmen Sie die Minima und Maxima von f auf der Rand $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ anhand der Methode von Lagrange.

4+5 Punkte

Aufgabe 13.

Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für (x, y) gegeben durch

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 3)$ lokal nach y aufgelöst werden kann. Erklären Sie, was das bedeutet.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix (erste Ableitung) der lokalen Lösung im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

c) Finden Sie die explizite Formel der impliziten Funktion und überprüfen Sie Aufgabenteil b).

d) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Aufgebenstellung.

4+2+3+1 Punkte

Aufgabe 14.
Sei die gewöhnliche Differential-Gleichung

$$y'(t) = e^{y(t)} \sin(t), \quad t \geq 0$$

gegeben. Lösen Sie die Differential-Gleichung mit Anfangswert $y(0) = 0$.

3+3 Punkte

Aufgabe 15.
Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

berechnen Sie das Fundamentalsystem der Differential-Gleichung $y' = Ay$, resp. $y' = By$.

6+6 Punkte