Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2017
Klausur | 07.08.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 21.08.2017 von 16:00–17:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	8	5	5	7	5	6	9	7	8	8	6,5	7	4,5	7	7	100
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	1	2	3
f_i	1	2	0	1

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel.

b) Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(-1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema.

4+4 Punkte

Aufgabe 2.

a) Finden Sie eine Quadraturformel

$$Q\left[\int_{-1}^{1} f(x)dx\right] = \frac{1}{2}f(x_1) + a_1 f(0) + \frac{1}{2}f(x_2)$$

mit maximalem Genauigkeitsgrad. Welchen Genauigkeitsgrad hat diese Quadraturformel?

b) Welchen Genauigkeitsgrad hätte eine Gauss-Quadratur mit 3 Stützstellen?

4+1 Punkte

Aufgabe 3.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_0 h^2 + c_1 h^5$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

(a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{2}\right)$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, daß Sie eine genauere Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral bekommen.

(b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_1 an.

4+1 Punkte

Aufgabe 4.
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 28 & -10 \\ -5 & -10 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^\top$.

b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

c) Lösen Sie mit Teilaufgabe (a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Wäre das Problem $Ax = b$ auch über LR-Zerlegung ohne Pivotisierung lösbar? Wenn ja, welche Zerlegung (LR oder Cholesky?) ist zur Lösung von $Ax = b$ vorzuziehen und warum?

2+1+1+2+1 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\mathsf{cond}_\infty A$ bezüglich der Zeilensummennorm.

b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D = \mathsf{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^{2} |a_{i,j}|, i = 1, 2$.

c) Bestimmen Sie nun die Kondition $\mathsf{cond}_\infty C$ bezüglich der Zeilensummennorm.

2+1+2 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) = e^x - 2.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ zwei Fixpunkte hat.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[-2, -1]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

c) Geben Sie eine Fixpunktiteration an, welche gegen den anderen Fixpunkt von Φ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen für die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts im Interval $[1, 2]$ gegeben sind.
Hinweis: Benutzen Sie den Logarithmus und nutzen Sie die Ungleichungen $\log(3) > 1$ und $\log(4) < 2$.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b(x) - y \end{pmatrix}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

a) Was ist die exakte Form der Lösung von $f(x, y) = 0$?

b) Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x, y) = (1, 1)$. Was beobachten Sie?

c) Zeigen Sie für einen beliebigen Startwert (x_0, y_0) und eine beliebige differenzierbare Funktion $b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.

1+4+4 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha + \alpha t + \gamma t^2,\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	0	0	3	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass alle Eigenwerte der Matrix $A^\mathsf{T} A$ positiv sind.

c) Skizzieren Sie die Lösung inklusive der Messwerte.

2+3+2 Punkte

Aufgabe 9.

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das Ergebnis $A^{(1)}$ nach dem ersten Schritt einer QR-Zerlegung mit Householder-Reflexionen an.

b) Wie lautet die Householder-Reflexion $H^{(2)} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ für den zweiten Schritt?
Hinweis: Nehme $\mathrm{sgn}(0) = 1$ an.

4+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2x-5x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Ist f stetig in $(0,0)$?

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f. Ist f partiell differenzierbar in (0,0)?

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass f differenzierbar in $(0,0)$ ist.

d) Bestimmen Sie die Ableitung von f bei $(x,y) = (1,1)$ in Richtung $v = (1,2)^T$.

2+2,5+2+1,5 Punkte

Aufgabe 11.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \left(\frac{2xy^2}{\pi} + \left(\frac{x}{\pi} \right) \right)^2 .$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2[f]$ von f zum Entwicklungspunkt $(x,y) = (\pi, 0)$.

6,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 12.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -\frac{5}{2}x^2 + 6xy + 3y^2.$$

Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest, ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x, y) = (x + 3)^2 + (y - 2)^2$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y - 5\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Langrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f under der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.

c) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus b) und mit Hilfe einer 2D Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y)$$

3+2+2 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Gleichung

$$\exp(xy) - y^2 \cos(z) = 1 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung in einer Umgebung von $(x, y, z) = (0, 1, \pi/2)$ eindeutig nach z aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen

$$\partial_x z(0,1) \qquad\qquad \partial_y z(0,1).$$

2,5+2 Punkte

Aufgabe 14.

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$2y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \qquad y(0) = 5.$$

Wenden Sie hierbei die Methoden 'Separation der Variablen' und 'Variation der Konstanten' an.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

4+3 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei

$$y' = f(y) \qquad 0 < y \in \mathbb{R}$$

mit

$$f(y) = ay^3 \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2ay_0^2 t}}$$

eine Lösung ist.

b) Geben Sie für $a > 0$ das maximale Existenzintervall $t \in [0, t_{max})$ an. Ist f auf $[y_0, \infty)$ Lipschitz-stetig? Wenn ja, geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

c) Geben Sie für $a < 0$ das maximale Existenzintervall $t \in [0, t_{max})$ an. Ist f auf $(0, y_0]$ Lipschitz-stetig? Wenn ja, geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

d) Skizzieren Sie beide Fälle ($a > 0$ und $a < 0$) qualitativ.

1+2+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: