Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | SS 2016
Klausur | 29.07.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 15.08.2016 von 10:00-11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Etage) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4,5	12,5	4,5	9	5	4,5	5	8	7	5	7	6	12	5	5	100
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}(x^2 + 2y)^3 + \exp(x - y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(\pi, 0)$.

4,5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Sei $f(x,y) = -4x^2 + 12(x+1)y - 4(y-1)^2$. Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x,y) = (x+2)^2 + (y-2)^2$ und die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x-1\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in M$.

c) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus b) und mit Hilfe einer 2D Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y).$$

5+5,5+2 Punkte

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y(\mathsf{exp}(x) - x) = -x(\mathsf{exp}(y) - 1)$$

im Punkt $(0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

c) Ist die Gleichung in $(0, 0)$ auch nach x auflösbar?

2,5+1+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

a) $2y' + 4y = \mathrm{e}^{-3t}, \;\; y(0) = \frac{3}{2}.$

b) $y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

5+4 Punkte

Aufgabe 5.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= -3u_1 - 4u_2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2)^T \\ u' &= Au \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung an, die

$$u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

b) Sei $y'(t) = f(t, y)$ eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit

$$f(t, y) = \frac{1}{ty}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ mit $y(e) = 1$.

3+2 Punkte

Aufgabe 6.

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x, y) = (\exp(x^2), \cos(x - y), \sin(x - y)), \quad g(x, y, z) = 4yz + 7xy.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $Df(x, y)$ und $\nabla g(x, y, z)$.

b) Bestimmen Sie $D(g \circ f)(0, \frac{\pi}{2})$ mit Hilfe der Kettenregel.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y)$ in Richtung des Einheitsvektors $(v_1, v_2)^T$ im Punkt (x_0, y_0).

2,5+1+1 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$.

(a) Sei $\tilde{b} = (-1.5, 2.5)^T$. Berechnen Sie den (exakten) relativen Fehler in der Lösung, $\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, und geben Sie auch eine Abschätzung (obere Schranke) für den Fehler an.

(b) Wie groß darf der relative Fehler in $\frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ nicht größer als 2% ist?

4+1 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -12 \\ -3 & 0 & -14 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Matrizen P, L und R aus Aufgabenteil (a).

6+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

Gegeben sei die von zwei Parametern α und β abhängige Matrix $A \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6+\alpha & -2+3\alpha \\ -4 & -2+3\alpha & 32+9\alpha+2\beta \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung LDL^T der Matrix, wobei D eine Diagonalmatrix und L eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

(b) Geben Sie an, für welche Wahl der Parameter α und β die Matrix A positiv definit ist.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2, 5, -3)^T$ und $\alpha = -1$, $\beta = \frac{3}{2}$.

4+1+2 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

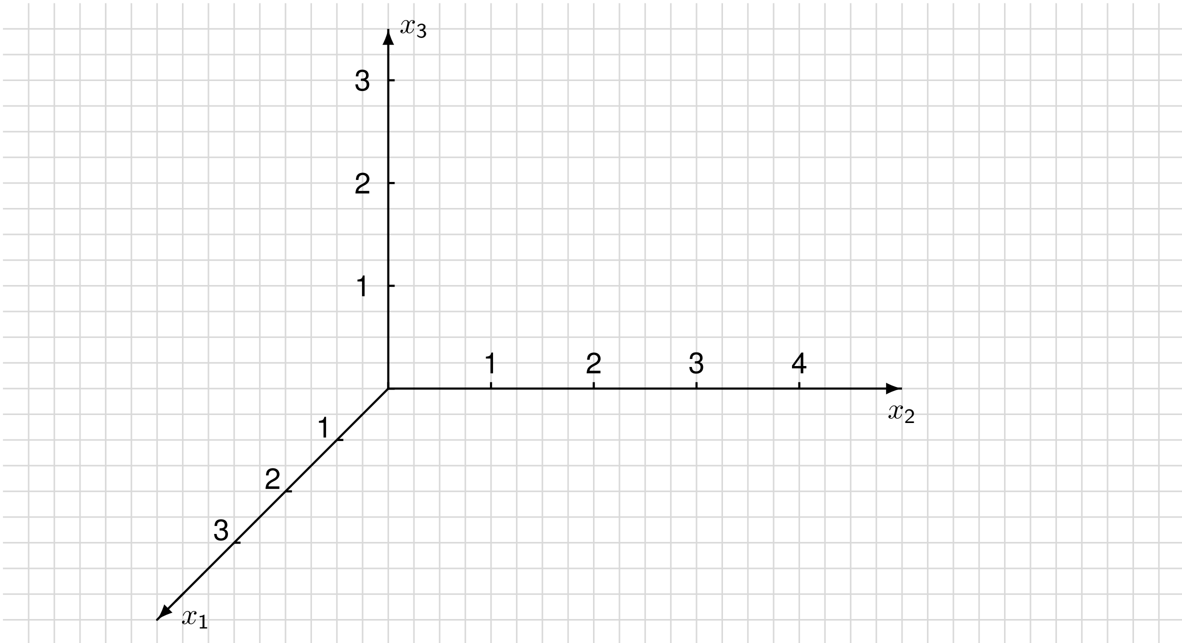
mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeichnen Sie die Spaltenvektoren a_1 und a_2 von A und den Vektor b in das untenstehende Koordinatensystem ein.

(b) Zeichnen Sie Ax^* und das Residuum $r = b - Ax^*$ im gleichen Koordinatensystem ein. Geben Sie die Lösung x^* und die Norm des Residuums $\|r\|_2$ explizit an.

(c) Geben Sie für die gegebene Matrix A jeweils einen (neuen) Vektor b an, für den die Kondition des linearen Ausgleichsproblems minimal und maximal wird.



1+2+2 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$||Ax^* - b||_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$$

mit Matrix A und rechter Seite b gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^2$ so, dass $||Ax - b||_2$ minimal ist. Verwenden Sie dazu Givens-Rotationen.

(b) Bestimmen Sie das Residuum und geben Sie die Norm des Residuums an.

Hinweis: Die Anwendung der Normalengleichungen oder des Verfahrens von Householder ergibt 0 Punkte. Bei korrekter Rechnung wird nur eine Givens-Rotation benötigt.

5+2 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y \sin x &= \pi + 1 \\ y + x \cos y &= -(\pi + 1) \end{cases} .$$

(a) Stellen Sie dieses Gleichungssystem in ein Nullstellenproblem um.

(b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(x^0, y^0) = (0, \pi)$ aus, um eine Lösung des in a) gefundenen Nullstellenproblems zu approximieren.

1+5 Punkte

Aufgabe 13.
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3\pi x - \cos(\frac{\pi}{2}x)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach, dass f im Intervall $I = [0, 1]$ genau eine Nullstelle $x^* \in I$ besitzt.

Hinweis: Formen Sie das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ zuerst in ein äquivalentes Fixpunktproblem um.

(b) Formulieren Sie eine Iteration, die garantiert gegen die Nullstelle konvergiert. Geben Sie den Startwert und die Iterationsvorschrift explizit an. Welche Konvergenzordnung können Sie sicherstellen?

(c) Ausgehend vom Startwert x_0 haben Sie nach einem Schritt der Fixpunktiteration die Approximation x^1 mit $|x^1 - x^0| = 10^{-5}$ bestimmt. Welchen absoluten Fehler der Approximation x^1 können Sie garantieren?

7+3+2 Punkte

Aufgabe 14.

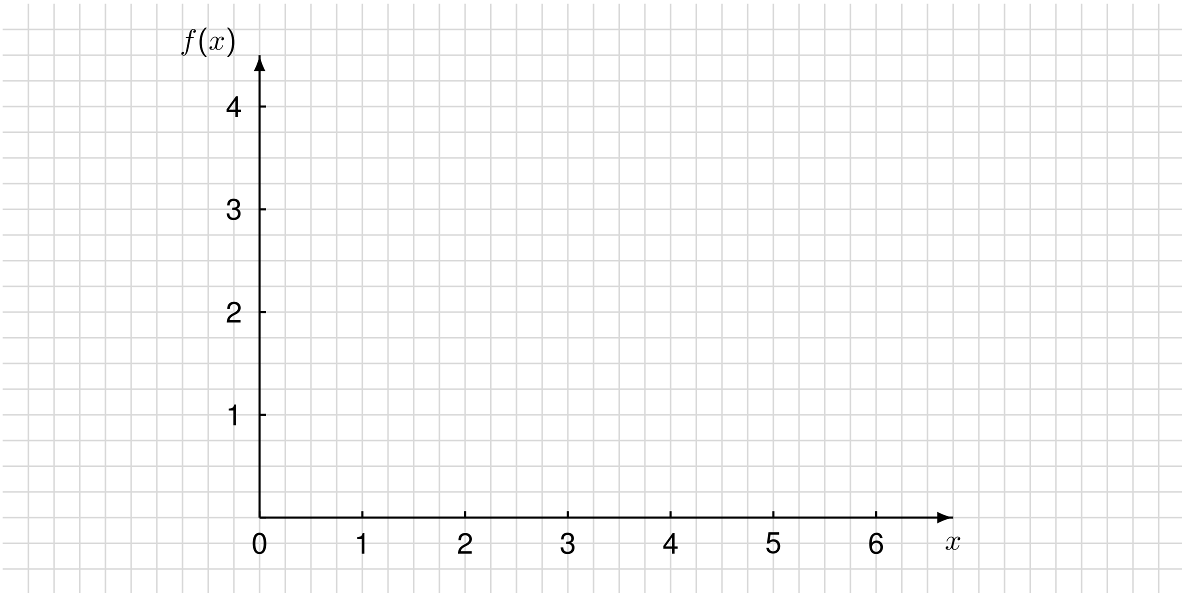
Gegeben seien Messwerte einer unbekannten Funktion f, durch

x_i	1	2	6
f_i	3	2	4

.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas den Wert des zugehörigen Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 3$.

(a) Bestimmen Sie die Werte $P_{1,1}$ und $P_{2,1}$ **graphisch** im folgenden Koordinatensystem. Zeichnen Sie die Werte $P_{1,1}$ und $P_{2,1}$ ein und geben Sie sie explizit an.



(b) Bestimmen Sie nun den Wert von $P_{2,2}$ indem Sie das Neville-Aitken Schema mit Hilfe der Rekursionsformel vervollständigen.

3+2 Punkte

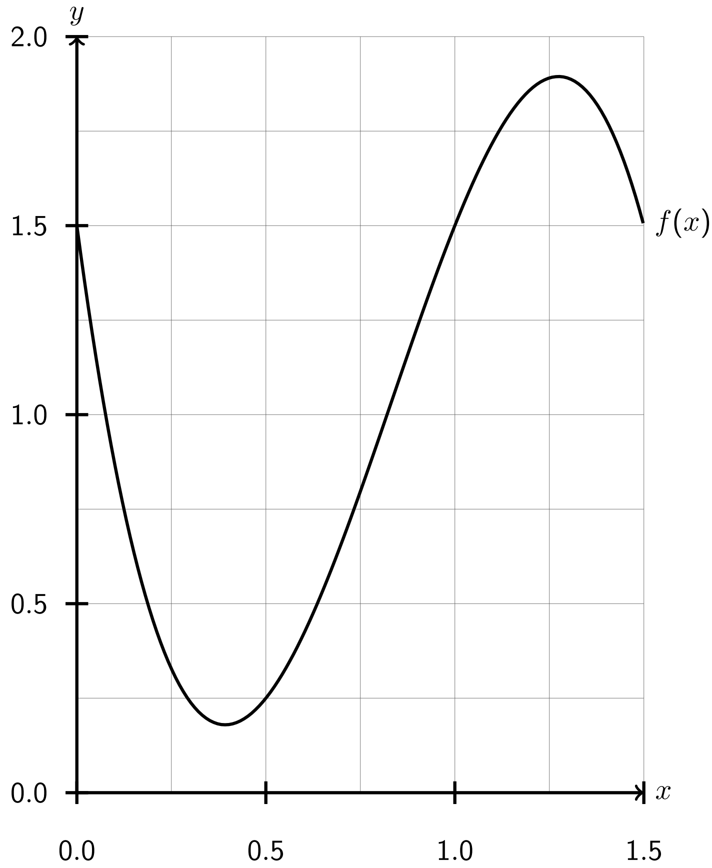
Aufgabe 15.

Gesucht ist eine Näherungslösung für das Integral

$$\int_0^{1.5} f(x)dx.$$

Hierfür soll die summierte Trapezregel benutzt werden.

(a) Skizzieren Sie die Trapeze, die sich für eine Unterteilung des Intervalls $[0, 1.5]$ in drei gleichgroße Teilintervalle ergeben, in folgendem Diagramm:



Bestimmen Sie dann den näherungsweisen Wert des Integrals, indem Sie die Flächen der Trapeze berechnen und summieren.

(b) Schätzen Sie den Fehler für die in Teil (a) benutzte summierte Trapezregel ab. **Hinweis**: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ auf dem Intervall $[0, 1.5]$ gilt: $|f^{(1)}(x)| \leq 7.5$, $|f^{(2)}(x)| \leq 25$, $|f^{(3)}(x)| \leq 30$.

3+2 Punkte