Prof. Dr. Mike Espig
Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2015/2016
Klausur am 18.03.2016 | Informationen zur Klausur

Klausur: 18.03.2016, 14:00 - 17:00 Uhr im Raum 1420|002 (Roter Hörsaal AM(Ro)).

Bearbeitungszeit: 180 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel (Formelsammlung, Formelblätter, Taschenrechner, Mobiltelefone, Laptops etc.) sind **nicht** zugelassen.

Nehmen Sie keine **Jacken**, **Taschen** oder **Mobiltelefone** (ausschalten!) mit an Ihren Platz. Sie können sie vorne im Hörsaal ablegen. Das Mitführen von Mobilfunkgeräten an Ihrem Platz gilt als Täuschungsversuch.

Ausweiskontrolle: Bitte legen Sie an ihrem Platz Ihren Studierendenausweis bereit.

Einlass ist 5 Minuten vor Beginn der Klausur. Auf Ihrem Platz liegt ein geschlossener Klausurbogen. Er darf erst nach Aufforderung geöffnet werden (Zuwiderhandlung kann mit Punktabzug oder Ausschluss von der Klausur bestraft werden.)

Klausureinsicht und mündliche Nachprüfungen:

- Die Klausureinsicht findet am 29.03.2016 von 09:00 - 10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Weitere Informationen zur Klausureinsicht werden vorher auf der Instituts-Homepage oder im L2P-Lernraum bekannt gegeben.
- Ein Einspruch gegen die Bewertung der Klausur ist nur schriftlich während der Klausureinsicht möglich.
- Anmeldungen zu mündlichen Nachprüfungen erfolgen ebenfalls während der Einsicht.

Viel Erfolg!

Prof. Dr. Mike Espig
Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2015/2016
Klausur | 18.03.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 29.03.2016 von 09:00 - 10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4	2,5	3	3	3,5	3,5	4	3,5	3	3,5	3	3	3	3,5	4	50
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-4	-1	2	11

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Interpolationsfehler auf dem Intervall $[-2, 2]$ an, unter der Annahme, dass

$$\max_{x\in[-2,2]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n}{2}$$

gilt.

c) Eine weitere Messung bei $x_{-1} = -2$ ergibt $f(-2) = -9$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel erneut und schätzen Sie den maximalen Interpolationsfehler ein weiteres Mal auf $[-2, 2]$ ab.

2+0,5+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-1, 1]$ mit drei Stützstellen x_0, x_1, x_2 der Form

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{dx} \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + f'(x_2),$$

wobei $x_0 = -1$ und $c_1 = 3$ vorgegeben seien. Bestimmen Sie c_0, x_1 und x_2 so, dass der Exaktheitsgrad möglichst groß wird.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^2 2x - x^2 dx$$

mit der gewonnen Quadraturregel.

1,5+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Das folgende Integral soll näherungsweise berechnet werden:

$$\int_0^2 2x\cos(\pi x)\,\mathrm{dx}.$$

a) Benutzen Sie dazu die summierte Trapezregel, wobei das Intervall in 4 Teile geteilt werden soll.

b) Schätzen Sie, wieviele Stützstellen in der summierten Trapezregel nötig sind, um bei der Berechnung des obigen Integrals einen Fehler $\leq 10^{-3}$ zu erreichen.

1+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung $A = LR$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

b) Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $cond_\infty A$ bezüglich der Zeilensummennorm.

b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^{2} |a_{i,j}|, i = 1, 2$.

c) Bestimmen Sie nun die Kondition $cond_\infty C$ bezüglich der Zeilensummennorm.

1+1,5+1 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Nehmen Sie an, dass $Ax = b$ eine eindeutige Lösung besitzt.

a) Bestimmen Sie den Rechenaufwand für die Lösung der Gleichung mittels Cramerscher Regel.

b) Schätzen Sie die Rechenzeit für die Lösung eines 100×100-Systems sowohl für die Cramersche Regel, als auch für die LR-Zerlegung. Gehen Sie von einer Rechenleistung von 100 MFlops aus.

2+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b(x) - y \end{pmatrix}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

a) Was ist die exakte Form der Lösung von $f(x, y) = 0$?

b) Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x, y) = (1, 1)$. Was beobachten Sie?

c) Zeigen Sie für beliebige $a, b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.

0,5 + 1,5 + 2 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α, β und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
$f(t_i)$	1	2	2	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung inkl. der Messwerte.

1,5 + 1 + 1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass sich nach dem ersten Schritt der QR-Zerlegung mit Householder-Transformation die Matrix

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & \frac{7}{5} \\ 0 & -3 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

ergibt.

b) Geben Sie (zum Beispiel durch eine weitere Householder-Transformation) die Matrix Q der QR-Zerlegung an.

1,5 + 1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.
Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) &:= x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2}. \end{aligned}$$

(a) Untersuchen Sie an welchen Stellen die Funktion differenzierbar bzw. zweimal differenzierbar ist. Berechnen Sie dort alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(b) Berechnen Sie – falls möglich – die Taylorpolynome zweiter Ordnung in den Punkten $(1, 0)$ und $(0, 0)$.

2+1,5 Punkte

Aufgabe 11.

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y^2 + xy = \sin(xy)$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ lokal nach y aufgelöst werden kann, d. h. es existiert $T : I_{x_0} \to J_{y_0}$ mit $y = T(x)$ sowie $\sin(xT(x)) = (T(x))^2 + xT(x)$ für alle $x \in I_{x_0}$.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 12.

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\, x \mapsto f(x) := \frac{e^{-x}}{2}$$

genau einen Fixpunkt in $[0,1]$ hat, d. h. es existiert genau ein $\hat{x} \in [0,1]$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Punkt $\vec{a}$ das globale Maximum der Gaußfunktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) := \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right)$$

ist.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 14.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) := xy^2$$

unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$.

3,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}, \quad y(0) = 1.$$

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: