Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen II (CES)

25.07.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 01.08.2014 von 10:00-11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Etage) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Die mündlichen Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 08.08.2014 statt. Ein Termin ist bei der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4,5	12,5	4,5	9	5	4,5	6	6	8	6	8	6	6	8	6	100
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + 2y^2)^3 + \cos(x - y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(\pi, 0)$.

4,5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Sei $f(x,y) = -\frac{3x^2}{2} + 12xy - 4y^2$. Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x,y) = (x+2)^2 + y^2$ und die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 4\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in M$.

c) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus b) und mit Hilfe einer 2D Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y).$$

5+5,5+2 Punkte

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y\cos(x) = -x\sin(y)$$

im Punkt $(0,0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

c) Ist die Gleichung in $(0,0)$ auch nach x auflösbar?

2,5+1+1 Punkte

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

a) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

b) $y' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$

4+5 Punkte

Aufgabe 5.

a) Sei $y'(t) = f(t, y)$ eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit

$$f(t, y) = \frac{y + 1}{t + 2}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ mit (i) $y(0) = 0$ und (ii) $y(0) = 1$.

b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= -3u_1 - 4u_2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2)^T \\ u' = Au \ \ &\text{mit} \ \ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung an, die

$$u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

2+3 Punkte

Aufgabe 6.

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x,y) = (x^2y, e^{xy}, \sin(x-y)), \quad g(x,y,z) = xz + 7y^2.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $Df(x,y)$ und $\nabla g(x,y,z)$.

b) Bestimmen Sie $D(g \circ f)(0, \frac{\pi}{2})$ mit Hilfe der Kettenregel.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in Richtung des Einheitsvektors $(v_1, v_2)^T$ im Punkt (x_0, y_0).

2,5+1+1 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine linke untere Dreiecksmatrix L, so dass

$$A = LL^T,$$

gilt.

6 Punkte

Aufgabe 8.
Gegeben sei die Matrix:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A, d.h. eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R, so dass

$$A = QR,$$

gilt.

Hinweis: Nicht rechnen.

6 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben seien die Daten (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, 3$.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	3	6
y_i	5	0	-10	65

Bestimmen Sie ein Polynom P_3 vom Höchstgrad 3, das die Daten interpoliert, d.h. für das

$$P_3(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, 3$$

gilt.

8 Punkte

Aufgabe 10.

Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

soll auf dem Gitter $x_i = ih$ mit $i = 0, \ldots, n$ und $h = \frac{1}{n}$ mit Hilfe von stückweise linearen Polynomen interpoliert werden. Wie groß ist h zu wählen, so dass der maximale Abstand auf $[0,1]$ zwischen Funktion und Approximation höchstens $\varepsilon = 10^{-5}$ ist?

6 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2 + \cos(y) \\ \log(y + 1) \end{pmatrix}$$

Führen Sie ausgehend von $(x_0, y_0) = (2, 0)$ einen Schritt des Newton-Verfahrens durch.

8 Punkte

Aufgabe 12.

Vorgelegt sei das lineare Gleichungsystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

sowie das gestörte linear Gleichungsystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Dabei gilt $||b - \tilde{b}||_\infty \leqslant 10^{-2}$.
Schätzen Sie

$$\frac{||x - \tilde{x}||_\infty}{||x||_\infty}$$

ab!

6 Punkte

Aufgabe 13.

Vorgelegt sei die Funktion $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\phi(x) = xe^{-x} + 1.$$

a) Zeigen Sie dass ϕ genau einen Fixpunkt hat.

Hinweis : Bestimmen Sie dazu ein geeignete Intervall, auf dem ϕ kontrahierend und selbstabbildend ist.

b) Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchtes benötigt, um mittels

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \qquad \text{ausgehend von} \qquad x_0 = 1,$$

der Fixpunkt x^* bis auf einen Fehler von 10^{-5} zu bestimmen. Verwenden Sie dabei eine allgemeine Kontraktionszahl K.

4+2 Punkte

Aufgabe 14.

a) Zeigen Sie dass die Polynome H_0, H_1, H_2 mit

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

bzgl. des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

Hinweis: Gerade/ungerade Funktion und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[H_1(x) \mathrm{e}^{-x^2} \right] = -H_2(x) \mathrm{e}^{-x^2}.$$

b) Es bezeichnen x_1 und x_2 die beide Nullstellen von H_2 (also $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$), sowie L_1 und L_2 die Lagrange-Polynome

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad L_2(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},$$

Weiterhin seien

$$w_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} L_1(x) \mathrm{d}x, \quad w_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} L_2(x) \mathrm{d}x.$$

Welche Ordung hat die Quadraturformel

$$Qf := w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

zur Approximation von

$$If := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x) \, \mathrm{d}x,$$

d.h. Polynome welches Grades werden exakt integriert?

3+5 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie ein x^*, dass $\|Ax - b\|_2^2$ minimiert. Ist x^* eindeutig bestimmt?

6 Punkte