Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen II (CES)

26.07.2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50% der möglichen Klausurpunkte**. Die von Ihnen erarbeiteten Bonuspunkte werden, wie zu Beginn des Semesters angkündigt, nur bei Bestehen der Klausur angerechnet.
- Die Klausureinsicht findet am 22.08.2013 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Bei Rücktritt von der Klausur *vor* Beginn der Klausur ist ein Attest notwendig. Bei Rücktritt *nach* Beginn der Klausur ist unverzüglich eine Ärztin oder ein Arzt aufzusuchen. Auf dem Attest müssen Befundtatsachen, Datum und genaue Uhrzeit aufgeführt werden. Das Attest ist unverzüglich beim zentralen Prüfungsamt (ZPA) einzureichen. Nach Weiterleitung an den zuständigen Prüfungsausschuss entscheidet dieser über die Anerkennung.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4,5	5	6,5	8,5	4	4	12,5	7,5	6,5	6,5	7	5,5	8	5	8	99
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabenübersicht

Aufgabe 1.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x + \sin(y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(0, 0)$.

Aufgabe 2.
Sei

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \cos(\pi x)\, dx.$$

(a) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

(b) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der summierten Trapezregel, wobei Sie das Intervall $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
  (i) in drei äquidistante Teilintervalle zerlegen,
  (ii) in vier äquidistante Teilintervalle zerlegen.

Hinweis: Es gilt

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3.
Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y - 2xy + y^3.$$

Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion ϕ und stellen Sie jeweils fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 4.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von A an, wobei L eine unipotente untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

Aufgabe 5.

a) Bestimmen Sie die relative Kondition κ_{rel} der Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = xe^{x^2}.$$

b) Was können Sie über den relativen Fehler der Funktion

$$g(x) = \frac{3}{2x + \ln(x+1)}$$

auf dem Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}, x > e^3$ sagen, wenn die Zahl x einen relativen Fehler von maximal 1 Prozent bei ihrer Erhebung aufweist. Liegt dieser ebenfalls unter 1 Prozent?

Aufgabe 6.

a) Sei $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}$, $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sei mit Hilfe der Definition, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf} \quad [0, \infty).$$

b) Geben Sie ein Beispiel einer konvergenten Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ an, mit

- f_n stetig auf $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $f_n(x) \xrightarrow{\text{pktw.}} f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ **und**
- f *nicht* stetig auf $[0,1]$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme:

a) $y' = yx^3, \quad y(0) = 1$

b) $y'' - y = \sin(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\sin(x) + x^3\right) + \frac{1}{10}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

(b) Angenommen der Fixpunkt x^* von f in $[-1,1]$ soll nun per Fixpunktiteration vom Startwert $x_0 = 0$ aus berechnet werden und f sei lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstante $L = \frac{4}{5}$. Geben Sie eine Abschätzung für die Anzahl der Schritte an, die erforderlich sind um x^* bis auf einen vorgegebenen Fehler von $\epsilon > 0$ zu bestimmen.

Aufgabe 9.

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Lösen Sie unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$.

b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Aufgabe 10.

Es seien $f(x, y) = x + y$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a)

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y).$$

Aufgabe 11.

a) Die Daten

x_i	-1	0	1	2	4
y_i	-2.8	0.2	1.0	0.0	-7.7

sollen mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = ax + bx^2$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate möglichst gut approximiert werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörige Normalengleichung an (nicht lösen!).

b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein $x^* \in \mathbb{R}^2$, das $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ minimiert.

Aufgabe 12.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}), & \text{für} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{für} \quad y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass diese Funktion an jeder Stelle $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, stetig ist.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, dass f keine stetige Erweiterung auf $\mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	3	4
f_i	0	2	6	7

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel. Geben Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ in der Newton Basis an.

b) Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(-1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema.

Aufgabe 14.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

Aufgabe 15.

a) Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-1, 1]$ mit drei Stützstellen der Form

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx c_0 f(-1) + c_1 f'(1) + c_2 f''(x_0) =: Q[f]$$

Bestimmen sie c_0, c_1, c_2 und x_0 so, dass der Genauigkeitsgrad möglichst groß ist. Geben Sie nach Ihrer Bestimmung von c_0, c_1, c_2 und x_0 den maximalen Genauigkeitsgrad an.

b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$. Schätzen Sie den maximalen Fehler ab, der entsteht, wenn das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

mit einer Quadraturformel vom Genauigkeitsgrad 3 approximiert wird.

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x + \sin(y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(0,0)$.

4,5 Punkte

Aufgabe 2.
Sei

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \cos(\pi x)\, dx.$$

(a) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

(b) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der summierten Trapezregel, wobei Sie das Intervall $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

  (i) in drei äquidistante Teilintervalle zerlegen,

  (ii) in vier äquidistante Teilintervalle zerlegen.

Hinweis: Es gilt

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

1 + 4 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y - 2xy + y^3.$$

Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion ϕ und stellen Sie jeweils fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

6,5 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von A an, wobei L eine unipotente untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

3 + 5,5 Punkte

Aufgabe 5.

a) Bestimmen Sie die relative Kondition κ_{rel} der Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = xe^{x^2}.$$

b) Was können Sie über den relativen Fehler der Funktion

$$g(x) = \frac{3}{2x + \ln(x+1)}$$

auf dem Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}, x > e^3$ sagen, wenn die Zahl x einen relativen Fehler von maximal 1 Prozent bei ihrer Erhebung aufweist. Liegt dieser ebenfalls unter 1 Prozent?

1 + 3 Punkte

Aufgabe 6.

a) Sei $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}$, $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sei mit Hilfe der Definition, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf} \quad [0, \infty).$$

b) Geben Sie ein Beispiel einer konvergenten Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ an, mit

- f_n stetig auf $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $f_n(x) \xrightarrow{\text{pktw.}} f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ **und**
- f *nicht* stetig auf $[0,1]$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme:

a) $y' = yx^3, \quad y(0) = 1$

b) $y'' - y = \sin(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}$

5 + 7,5 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\sin(x) + x^3\right) + \frac{1}{10}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

(b) Angenommen der Fixpunkt x^* von f in $[-1, 1]$ soll nun per Fixpunktiteration vom Startwert $x_0 = 0$ aus berechnet werden und f sei lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstante $L = \frac{4}{5}$. Geben Sie eine Abschätzung für die Anzahl der Schritte an, die erforderlich sind um x^* bis auf einen vorgegebenen Fehler von $\epsilon > 0$ zu bestimmen.

4,5+ 3 Punkte

Aufgabe 9.

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Lösen Sie unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$.

b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 10.
Es seien $f(x,y) = x + y$ und die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in M$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a)

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y).$$

5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 11.

a) Die Daten

x_i	-1	0	1	2	4
y_i	-2.8	0.2	1.0	0.0	-7.7

sollen mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = ax + bx^2$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate möglichst gut approximiert werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörige Normalengleichung an (nicht lösen!).

b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein $x^* \in \mathbb{R}^2$, das $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ minimiert.

4 + 3 Punkte

Aufgabe 12.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}), & \text{für} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{für} \quad y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass diese Funktion an jeder Stelle $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, stetig ist.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, dass f keine stetige Erweiterung auf $\mathbb{R}^2$ besitzt.

2,5 + 3 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	3	4
f_i	0	2	6	7

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel. Geben Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ in der Newton Basis an.

b) Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(-1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema.

4,5+ 3,5 Punkte

Aufgabe 14.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

5 Punkte

Aufgabe 15.

a) Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-1, 1]$ mit drei Stützstellen der Form

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_0 f(-1) + c_1 f'(1) + c_2 f''(x_0) =: Q[f]$$

Bestimmen sie c_0, c_1, c_2 und x_0 so, dass der Genauigkeitsgrad möglichst groß ist. Geben Sie nach Ihrer Bestimmung von c_0, c_1, c_2 und x_0 den maximalen Genauigkeitsgrad an.

b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$. Schätzen Sie den maximalen Fehler ab, der entsteht, wenn das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

mit einer Quadraturformel vom Genauigkeitsgrad 3 approximiert wird.

5 + 3 Punkte