Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen II (CES)

20.07.2012

Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.* Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Teilnehmer der Klausur können sich nur *vor Abgabe* der Klausur krankmelden. Dies muss schriftlich auf einem Formblatt bei der Klausuraufsicht angezeigt werden, die in diesem Punkt den Prüfungsausschuss vertritt; nur dann ist die Unverzüglichkeit gemäß Prüfungsordnung gewahrt. *entbindet nicht von der Pflicht, ein ärztliches Attest gemäß Prüfungsordnung fristgerecht einzureichen.* Der Termin der Klausureinsicht wird 14 Tage vorher bekannt gegeben.

Bitte verwenden Sie ein dokumentenechtes Schreibgerät, aber keinen Rotstift. Als Hilfsmittel sind *zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene A4 Blätter* zugelassen, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Weitere Hilfsmittel (Bücher, Formelsammlung, Formelblätter, Taschenrechner, Handys, Laptops etc.) sind **nicht** erlaubt. Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.

Ich versichere, die Klausur selbstständig und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln zu bearbeiten. Mir ist bekannt, dass die Klausur bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, als nicht bestanden gewertet wird. Weiterhin versichere ich, die Zulassungsvoraussetzungen erfüllt zu haben und ordnungsgemäß zur Klausur angemeldet zu sein.

NAME, VORNAME: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4	2	3,5	3,5	3	4	4	4	2	3	4	3	3	4	3	50
Ihre Punkte																

Bonuspunkte: ☐ Gesamtpunkte: ☐ Note: ☐

Aufgabe 1.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1-2a & -1+2a \\ -1 & -5 & 2+2a & -a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar? Welche Dimension hat die mehrdeutige Lösungsmenge?

(c) Geben Sie die Lösung für $a = 1, b = 4, c = -1$ an.

1+2+1 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 99 & 5 & 2a \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

1+1 Punkte

Aufgabe 3.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist diese Matrix diagonalisierbar?

3,5 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion

$$f(x,y) = (x + 2y + 1)e^{-xy}$$

an.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f.

(c) Berechnen Sie Δf.

(d) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung um den Punkt $(x,y) = (0,0)$.

(e) Was ist die Richtungsableitung von f im Punkt $(x,y) = (-1,1)$ in Richtung $n = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$?

0,5+1+0,5+1+0,5 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = ye^x + xe^y.$$

(a) Zeigen Sie: $f(x, y) = 0$ kann bei $(0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden. Durch welchen Satz wird die Auflösbarkeit garantiert?

(b) Geben Sie für den Fall in (a) die Ableitung $y'(x)$ bei $x = 0$ an.

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 6.

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^4 + y^4 = 1\}$ die Menge aller Punkte auf einem „Superkreis“.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte auf der Menge M mit extremalem Abstand zum Ursprung mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren. (Hilfestellung: Skizzieren Sie die Menge M.)

(b) Berechnen Sie den minimalen und maximalen Abstand der Punkte auf der Menge M zum Ursprung.

3+1 Punkte

Aufgabe 7.

Geben Sie jeweils die vollständige Lösung $y(x)$ der folgenden gewöhnlichen Diffferentialgleichungen an:

(a) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$

(b) $y' - \frac{4}{x} \cdot y = x^3$ mit $x \neq 0$

2+2 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch

$$p_A(\lambda) = -4 + 4\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

und berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$:

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0.$$

(c) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ in $y(0) = (1, 0, \alpha)^T$, so dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ gilt.

1+2,5+0,5 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = \sin t - y.$$

(a) Sind die Voraussetzungen für die Konvergenz der Picarditeration erfüllt?

(b) Führen Sie zwei Schritte der Picarditeration mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ durch.

0,5+1,5 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Funktion $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \frac{1}{6} x e^{x^2-1} + \frac{1}{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

(b) Wie viele Iterationen der Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\,,$$

sind notwendig, um den Fixpunkt $x^\star$ bis auf 10^{-8} genau zu approximieren? Der Startwert sei dabei $x_0 = 0$ und man soll zur Beantwortung der Frage höchstens eine Fixpiunktiteration durchführen. Begründen Sie Ihre Antwort.

1+2 Punkte

Aufgabe 11.

Berechnen Sie die absolute und die relative Kondition des Problems $x \mapsto f(x)$ für die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3^2 + e^{x_1} \sin(x_2) \\ x_3 + \cos(x_1) \sin(x_2) \\ e^{x_3}(1 + x_2^2 + x_1) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

bzgl. der $\| \cdot \|_\infty$-Norm im Punkt $x_0 = (0, \pi, 1)$.

4 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben seien die Messwerte

k	1	2	3	4
α_i	0	0.5	1	1.5
x_i	-1	2	-1	-4

für die Größe $x(\alpha)$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$x(\alpha) = r\cos(\alpha\pi) + s\,.$$

Bestimmen Sie r und s optimal im Sinne der kleinesten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende Minimierungsproblem und lösen Sie dieses über die Normalengleichungen.

3 Punkte

Aufgabe 13.

Finden Sie eine genauene Approximation $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ zur Lösung des nichlinearen Gleichungssystems

$$f_1(x_1, x_2) = 7x_1 - \cos(x_1) - 2x_2 = x_1$$

$$f_2(x_1, x_2) = 9x_2 - x_1 x_2^2 - \sin(x_1) = x_2$$

indem Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durchführen.

1+2 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 24 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Cholesky-Zerlegung von A an.

(b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der $||\cdot||_\infty$- und der $||\cdot||_1$-Norm

2+2 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie mittels Householder-Spiegelung einen Schritt für die QR-Zerlegung der Matrix A durch und geben Sie die Matrizen $Q^{(1)}$ und $R^{(1)}$ explizit an.

3 Punkte