Aufgabe 1. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1-2a & -4a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $a = -\frac{1}{2}$, $b = 5$ an.

1,5+1,5+1 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a \in \mathbb{R}$:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix},$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist. 1+1 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Ist diese Matrix diagonalisierbar?

Hinweis: 3 ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix B.

3,5 Punkte

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x, \partial_{xx}, \partial_y, \partial_{yy}$ der Funktion

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

(b) Was ergibt sich für Δf?

(c) Berechnen Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung um den Punkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

(d) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(x, y) = (2, 1)$ in Richtung $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1,5+0,5+1+1,5 Punkte

Aufgabe 5. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^z + yx \\ z\mathrm{e}^{\sin(y)} + 2\pi x\mathrm{e}^{\cos(y)} \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie, ob durch die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ bei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal eine Funktion $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = f(y)$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(z)$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass in der Nähe von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $F(x,y,z) = 0$ sowohl eine Funktion $y(x)$ als auch $z(y)$ und $x(z)$ gegeben ist.

2+2 Punkte

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 + xy$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Lagrange Formalismus alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$.

(c) Was sind die globalen Maxima und Minima von f auf der elliptischen Fläche $K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\big\}$?

1,5+2+1 Punkte

Aufgabe 7. Geben Sie jeweils die vollständige explizite Lösung $y(x)$ der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen an:

(a) $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{y}$,

(b) $2y'' + 2y' = 12y + 1$.

1+1,5 Punkte

Aufgabe 8. (a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$:

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ sowie } y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie alle Anfangswerte an, so dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ gilt und begründen Sie ihre Wahl.

3+1 Punkte

Aufgabe 9. Gegeben Sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = t - 2y(t).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, y) = t - 2y,$$

Lipschitz-stetig bezüglich y ist.

(b) Führen Sie zwei Schritte der Picard-Iteration durch für das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$.

1+1 Punkte

Aufgabe 10. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von A an, wobei L eine unipotente untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

2+2 Punkte

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass für die relative Kondition des Problems $x \mapsto f(x)$ für die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + \sin(x_1)\cos(x_2) \\ \arctan(x_1 + x_2) + \frac{8+\pi}{2} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\kappa_{\text{rel}} \leq \frac{1}{2}\|x_0\|_\infty.$$

2 Punkte

Aufgabe 12. In einem Dorf wurde festgestellt, dass sich s: "Anzahl der brütenden Störche pro Jahr" zu p: "Anzahl der Neugeborenen pro Jahr" folgendermaßen verhält:

s	16	6	10	19	3
p	9	3	8	7	2

Es soll das Modell $p = x \cdot s$ untersucht werden.

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

(b) Ermitteln Sie den Parameter x mittels Normalengleichung.

(c) Bestimmen Sie die $\|\cdot\|_2$-Norm des Residuums.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 13. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $v \neq 0$.
Gegeben sei folgende Matrix:

$$Q = \mathbb{I}_n - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = \mathbb{I}_n$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und -vektoren von Q.
Hinweis: Die Matrix beschreibt eine Spiegelung an der (Hyper-)Ebene, deren (nicht normierter) Normalenvektor v ist.

1,5+2 Punkte

Aufgabe 14. Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{5}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Lösung der Gleichung

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{5}$$

in $[0,1]$ <u>bewiesenermaßen</u> bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-2} genau mittels Fixpunktiteration, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$.

3+1,5 Punkte

Aufgabe 15. Führen Sie ausgehend von den Startwerten

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0,$$

einen Schritt des Newton-Verfahrens zwecks Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{3}x_2^2 &= \frac{1}{8} \\ x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

aus.

2 Punkte