Aufgabe 1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Rang(A), Kern(A) und Bild(A). Ist A invertierbar? Geben Sie zwei verschiedene rechte Seiten b_1, b_2 an, so dass die Gleichung $Ax = b_i$ einmal lösbar und einmal nicht lösbar ist.

(b) Geben Sie eine allgemeine Gleichung für Rang(M), $\dim$ Kern(M) und n für eine beliebige reelle $n \times n$-Matrix M an. Verifizieren Sie diese Gleichung für A.

(c) Zeigen Sie dass Bild(A) $\subset$ Ker(A), d.h. für alle $x \in$ Bild(A) gilt auch $x \in$ Ker(A). Leiten sie damit $A^2 = 0$ her.

2+0,5+1 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A mit $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sowie den Eigenraum zum Eigenwert λ_1.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen sie Ihre Antwort.

(c) Ist A positiv definit? Zeigen sie dass A invertierbar ist und geben Sie die Eigenwerte von A^{-1} an.

2+0,5+0,5 Punkte

Aufgabe 3. Sei f eine Abbildung von $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Zeigen Sie:
Für alle $(x,y) \in A$ gilt

$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$

wobei $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Geben Sie weiterhin die stetige Fortsetzung von f in den Punkt $(0,0)$ an.
Hinweis: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

2,5 Punkte

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und geben Sie die entsprechende Jacobimatrix an.

(a) $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.

(b) $g(x, y, z) = e^{xy}(x + yz)$.

1+1 Punkte

Aufgabe 5. Wir betrachten das Gleichungensystem

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 & = & 1, \\ xyz & = & 1. \end{cases}$$

(a) Sei (x_0, y_0, z_0) eine Lösung von $(\mathcal{P})$. Zeigen sie, dass $(\mathcal{P})$ in der Nähe von $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ eindeutig nach (y, z) auflösbar ist, d.h. es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $z(x), y(x)$ die $(\mathcal{P})$ für alle $x \in I$ lösen.

(b) Bestimmen Sie $z'(x_0)$ und $y'(x_0)$.

2+1 Punkte

Aufgabe 6.

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = e^{y(t)} \sin t, \qquad y(0) = y_0$$

lokal um $(0, y_0)$ eine eindeutige Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

(b) Für welche Anfangswerte y_0 existiert die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$?

3+1 Punkte

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(c) Was sind die globalen Maxima und Minima von f auf der Kreisscheibe $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$?

1,5+2+1 Punkte

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems zweiter Ordnung:

$$u''(t) + 4u(t) = 2t^2 - 1, \qquad u(0) = u'(0) = 0.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $u_s(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

Hinweis: $\exp(ix) + \exp(-ix) = \frac{1}{2}\cos(x)$. 4 Punkte

Aufgabe 9. Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-1, 1]$ mit 2 Stützstellen x_0, x_1, wobei $x_1 = 1$ vorgegeben ist:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(1).$$

Bestimmen Sie c_0, c_1, x_0 so dass der Exaktheitsgrad möglichst groß wird.

3 Punkte

Aufgabe 10. Das Integral

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx$$

soll mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel mit konstanter Schrittweite h approximiert werden. Wie groß ist h zu wählen damit der Fehler der Approximation kleiner als 10^{-4} wird?

Hinweis: $(\arctan x)' = \frac{1}{(1+x^2)}$

4 Punkte

Aufgabe 11. Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 2.8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumsnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

2 Punkte

Aufgabe 12. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 13. Bestimmen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Punkte

Aufgabe 14. Durch die Daten

x_i	0	$\pi/2$	π
y_i	2	2	-3

soll eine Funktion der Form

$$y(x) = a \sin x + b \cos x$$

gelegt werden, so dass der Abstand im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate möglichst klein wird. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörige Normalengleichung an (nicht lösen!). 2,5 Punkte

Aufgabe 15. Gegeben sei die Funktion $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\phi(x) = \frac{1}{4} x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}.$$

(a) Zeigen sie, dass ϕ kontrahierend ist mit einer Konstante $L \leq 0.75$.

(b) Zeigen sie, dass ϕ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

(c) Für die Iteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

gelte näherungsweise

$$x_4 = 0.5715, \quad x_5 = 0.5707.$$

Kann diese Iteration abgebrochen werden, falls der Fixpunkt x^* bis auf 10^{-4} genau approximiert werden soll? Begründen sie ihre Antwort.

3+2+1 Punkte

Aufgabe 16. Führen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y) \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

einen Schritt des Newton-Verfahrens mit Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch.

3 Punkte