Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := e^{\sin(xy)}.$$

Berechnen Sie die zweite partielle Ableitung $\partial_{yy} f$ und zeigen Sie, dass diese auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

3 Punkte

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^4 + 2x\cos y + \sin z = 0$ in der Nähe von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eindeutig nach z aufgelöst werden kann, und bestimmen Sie die Ableitungen $\partial_x z(0, 0)$ und $\partial_y z(0, 0)$.

3 Punkte

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 1$.

6 Punkte

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{2e^{y^2}}{y} \sin t$$

lokal um $(t_0, y_0) = (0, 1)$ eine eindeutige Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

Hinweis zum Berechnen der Lösung: Die Dgl. hat einen speziellen Typ.

3 Punkte

Aufgabe 5. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sowie den Eigenraum zum Eigenwert λ_2.

(b) Ist A positiv definit? Ist A invertierbar? Begründen Sie ihre Antwort mit Hilfe der in (a) berechneten Eigenwerte bzw. Eigenvektoren.

4 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f\,:\;\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\;:\;f(v) = A\,v$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie Rang(A), Kern(A) und Bild(A).

(b) Wie hängen im Allgemeinen Rang(M), dim(Kern(M)) und das Format einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zusammen? Verifizieren Sie dies anhand der Matrix A.

(c) Wie lautet im Allgemeinen die Fredholm Alternative? Verifizieren Sie diese für die Matrix A.

3 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Cholesky Zerlegung von A. Zeigen Sie, dass A symmetrisch und positiv definit ist.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (0, 0, 1)^T$ mit Hilfe der Cholesky Zerlegung aus Teilaufgabe (a).

5 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sind folgende Messwerte

i	1	2	3	4
t_i	0	0.5	1	1.5
y_i	-1.1	2.1	-1.1	-3.9

für die Größe $y(t)$, die der Gleichung

$$y(t) = p \sin(\pi t) + q$$

genügt. Bestimmen Sie p und q optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende Minimierungsproblem, und lösen Sie dieses über die Normalengleichungen.

3 Punkte