Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ 2x + 3y - 3z \\ x + 4y + z \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Basis für den Kern von f.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für das Bild von f.

(c) Verifizieren Sie die Dimensionsregel für f.

3 Punkte

Aufgabe 2. Beweisen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach die Existenz und Eindeutigkeit einer Nullstelle $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ der Funktion

$$g : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x - \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{1}{4}.$$

Hinweis: Sie müssen x_0 nicht explizit berechnen.

4 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie für $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ein reelles Fundamentalsystem.

5 Punkte

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) - y'(x) = x - 1.$$

Hinweis: Als Ansatz für eine spezielle Lösung y_s können Sie $y_s(x) = x(A_0 + A_1 x)$ verwenden, wobei die reellen Koeffizienten A_0, A_1 noch bestimmt werden müssen.

4 Punkte

Aufgabe 5. Sei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(t,x) = t^{-n/2} \exp\Big(- \frac{\|x\|^2}{4t} \Big)$$

($\|\cdot\|$ = euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$). Zeigen Sie, dass f eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

ist.

Hinweis: Es bezeichnet Δ den Laplace-Operator, d.h. $\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

4 Punkte

Aufgabe 6. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^x + y \sin y - z \ln z$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

für (x, y, z) aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $(1, \pi, e)$ nach y bzw. z aufgelöst werden kann.
Berechnen Sie für die Auflösungsfunktionen $y = y(x, z)$ bzw. $z = z(x, y)$ die Ausdrücke $y'(1, e)$ bzw. $z'(1, \pi)$.

4 Punkte

Aufgabe 7. Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in den Stützstellen

$$x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = 1, x_2 = 4$$

durch ein Polynom. Schätzen Sie weiterhin den Interpolationsfehler im Intervall $[\frac{1}{4}, 4]$ nach oben ab. 5 Punkte

Aufgabe 8. Mittels Quadratur soll das Integral

$$I(f) := \int_0^1 \omega(x) f(x)\, dx \quad \text{mit } \omega(x) := 30(x^2 - x + \tfrac{1}{5})$$

angenähert werden. Unter dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 \omega(x) f(x) g(x)\, dx$$

steht das Polynom $L(x) = x^2 - x$ orthogonal auf allen Polynomen vom Grad ≤ 1. Als Annäherung des Integrals $I(f)$ betrachten wir folgende Quadraturformel:

$$I_2(f) := c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1).$$

(a) Stellen Sie die notwendigen Bedingungen an c_0, c_1, x_0, x_1 auf, um bei der Quadraturformel I_2 den Exaktheitsgrad $m = 1$ zu erhalten.

(b) Bestimmen Sie c_0, c_1, x_0, x_1, so dass die Quadraturformel I_2 den Exaktheitsgrad $2m + 1 = 3$ besitzt.

5 Punkte

Aufgabe 9. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 28 & -10 \\ -5 & -10 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^\top$.

(b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

(c) Lösen Sie mit Teilaufgabe (a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(d) Berechnen Sie die Determinante von A.

(e) Wäre das Problem $Ax = b$ auch über LR-Zerlegung ohne Pivotisierung lösbar? Wenn ja, welche Zerlegung ist zur Lösung von $Ax = b$ vorzuziehen und warum?

6 Punkte + 1 Bonuspunkt