Aufgabe 1. Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; a + bx_2 + cx_3^2 = 0 \right\}.$$

Entscheiden Sie, für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Menge U ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist und begründen Sie dies.

4 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y\,.$$

6 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) := (x^2 y, x\cos y),\\
&g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) := xy,\\
&h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h := g \circ f.
\end{aligned}
$$

3 Punkte

Aufgabe 4. Finden Sie alle Extremstellen von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) := x + y$$

unter der Nebenbedingung $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.
Begründen Sie, warum es sich um Extremstellen handelt, und geben Sie jeweils an, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.
Hinweis: Die Menge $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \ :\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1\}$ ist beschränkt.

5 Punkte

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ye^x + xe^y = 0$$

im Punkt $(0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann und bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

4 Punkte

Aufgabe 6. Entwickeln Sie eine Integrationsformel für das Einheitsintervall $[0, 1]$ mit 2 Stützstellen x_0 und x_1. Vorgegeben ist $x_1 = 1$. Bestimmen Sie x_0 so, dass der Exaktheitsgrad möglichst groß ist. Berechnen Sie auch die zugehörigen Gewichte.

3 Punkte

Aufgabe 7. (a) Sei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre linke untere Dreiecksmatrix. Geben Sie einen Algorithmus (Pseudo-code) zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Lx = y$$

an.

(b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus (Pseudo-code) zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Qx = y$$

an.

Wieviele Rechenoperationen werden in (a) bzw. (b) benötigt?

3 Punkte

Aufgabe 8. Sei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre linke untere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass L^{-1} auch eine linke untere Dreiecksmatrix ist.

3 Punkte

Aufgabe 9. Welche Zerlegungen in L (linke untere), R (rechte obere), P (Permutation), D (diagonal), Q (orthogonale) Faktoren empfehlen Sie für die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die entsprechenden Zerlegungen. Begründen Sie jeweils Ihre Wahl.

3 Punkte

Aufgabe 10. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$ und vollem Rang n. Beschreiben Sie zwei Verfahren zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2.$$

Was sind Vor- und Nachteile dieser Verfahren?

2 Punkte