



Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

**Mathematische Grundlagen I (CES) | WS
 Klausur | 04.03.2026**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet. Die handschriftlichen DIN A4 Blätter sind mit der Klausur abzugeben und können in der Einsicht zurückerhalten werden; eine Berücksichtigung bei der Bewertung der Klausur erfolgt nicht.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 13.03.2026 von 10:00 - 11:30 Uhr im Eph (1090|321) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: _ _ _ _ _

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
Punkte	4	4	4	3	4	3	6	4	6	3	4	4.5	3	3	4.5	60
Ihre Punkte																

Klausur Bonus Gesamt
 + =

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$133 \text{ ist Teiler von } 11^{n+1} + 12^{2n-1}.$$

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei die komplexe Zahl

$$z(t) := \sqrt{t} \cos(t^2) + i\sqrt{t} \sin(t^2), \quad \text{wobei} \quad t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}.$$

Finden Sie die Exponentialdarstellung von

- a) $z(t)$,
- b) $\overline{z(t)}$,
- c) $iz(t)$,
- d) $\overline{iz(t)}$,
- e) $z^2(t)$,
- f) $|z(t)|$.

Skizzieren Sie die Zahlen für $t = 0$ und $t = \sqrt{\pi}$ in der komplexen Ebene.

Hinweis: Ggf. hilft die Verwendung der Eulerschen Formel

6*0.5+1.0=4.0 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- a) Beweisen Sie anhand des ε -Kriteriums, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und geben Sie den Grenzwert an.
- b) Geben Sie eine Formel für die Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

an und beweisen Sie diese durch ein Induktionsargument.

Hinweis: Die Betrachtung der ersten Partialsummen kann bei der Aufstellung einer Vermutung für die Formel hilfreich sein.

- c) Geben Sie somit den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

- d) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

1.5+1.5+0.5+0.5=4.0 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $p > 0$.

Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einem geeigneten Vergleichskriterium.

3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| + 1 + (1 + |x|)^{-1}$.

- (a) Zeigen Sie mittels der ε - δ -Definition, dass die Funktion f stetig ist.
- (b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.
- (c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

2+1+1=4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Sei $f(x) = x^5 + 5x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle besitzt. Verwenden Sie hierzu den Zwischenwertsatz und eine geeignete Monotonieanalyse.
- b) Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f''(\xi) = 0.$$

Nutzen Sie dazu den Mittelwertsatz in geeigneter Form.

2+1=3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben sei die stetige und differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sin(\ln(1 + x^2)).$$

Sie dürfen annehmen, dass die erste Ableitung dieser Funktion $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auch auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist.

- i) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von g .
- ii) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen und alle lokalen und globalen Maxima und Minima.

1.5+4.5=6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Berechnen Sie das Taylorpolynom T_n vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$. Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit der Fehler

$$\|f - T_n\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - T_n(x)|$$

kleiner gleich $\frac{1}{10}$ ist?

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

a) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} x \exp(10 - x^2) dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b \exp(x) \sin(x) dx.$$

2+2+2=6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 10.

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{a, b, c\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.
- b) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren v_1, v_2, v_3 die daraus konstruierten Vektoren

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v_1 \\ \omega_2 &= v_2 - \frac{\omega_1 \cdot v_2}{\|\omega_1\|^2} \omega_1 \\ \omega_3 &= v_3 - \frac{\omega_1 \cdot v_3}{\|\omega_1\|^2} \omega_1 - \frac{\omega_2 \cdot v_3}{\|\omega_2\|^2} \omega_2 \end{aligned}$$

jeweils zueinander orthogonal sind.

- c) Bestimmen Sie die zu $\{a, b, c\}$ gehörige Orthogonalbasis.

1+1+1=3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 11.

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ abgebildet?
- b) Geben Sie eine Darstellung von Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.
- c) Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung an.

Hinweis: Nutzen Sie die Linearität der Abbildung aus.

1+2+1=4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 12.

Sei \mathbb{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 sowie der Unterraum

$$\mathbb{U} = \text{span} \{p_1(z), p_2(z)\} \quad \text{mit} \quad p_1(z) = 1 + z \quad \text{und} \quad p_2(z) = 1 + z^2.$$

- a) Betrachten Sie die Basis $\{1, z, z^2\}$ von \mathbb{P}_2 . Geben Sie die eindeutige lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die durch $\Phi(1) = (1, 0, 0)^\top$, $\Phi(z) = (0, 1, 0)^\top$ und $\Phi(z^2) = (0, 0, 1)^\top$ definiert ist, an.
- b) Wir definieren auf \mathbb{P}_2 ein Skalarprodukt durch

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{P}_2} := \langle \Phi(p), \Phi(q) \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \text{für } p, q \in \mathbb{P}_2. \quad (1)$$

Orthonormalisieren Sie die Menge $\{p_1(z), p_2(z)\}$ bezüglich dieses Skalarprodukts mit dem Gram-Schmidt-Verfahren und geben Sie die resultierende orthonormale Basis $\{u_1(z), u_2(z)\}$ von \mathbb{U} an.

- c) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\text{proj}_{\mathbb{U}}(q)$ des Polynoms $q(z) = 3 + 2z + z^2$ auf \mathbb{U} bezüglich des Skalarprodukts aus (1).
- d) Berechnen Sie den Approximationsfehler $\|q - \text{proj}_{\mathbb{U}}(q)\|_{\mathbb{P}_2}$ wobei die Norm durch das Skalarprodukt (1) induziert wird.

0.5+2+1+1=4.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a .
- (b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a .

2+1=3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 14.

Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a \in \mathbb{R}$:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an wann die Matrix regulär bzw. singular ist.

2+1=3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Geben Sie ein α an, sodass B diagonalisierbar mit orthogonalen Eigenvektoren ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B für $\alpha = 3$.
(Tipp: Ein Eigenwert ist $\lambda = -2$)
- (c) Zeigen Sie, dass für $\alpha = 0$, das charakteristische Polynom $p_B = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ lautet und die Nullstellen $\lambda \in \{-2, 0, 1\}$ besitzt.
- (d) Zeigen Sie, dass B mit $\alpha = 0$ nicht diagonalisierbar ist.

0.5+2+1+1=4.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

