Vertr.-Prof. Dr. Aleksey Sikstel
Dr. Jörn Ungermann
Lukas Netterdon

Applied and Computational Mathematics

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2024
Klausur | 26.02.2025

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 02.04.2025 von 10:00 - 11:00 Uhr im klPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	2	4	2	3	4	3	4	2	3	3	4	5	4	3	4	50
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen N gilt

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n}.$$

2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

(a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die $z^4 = -4$ erfüllen.

(b) Seien $y, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$z \sim y \Leftrightarrow |z| = |y|$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Skizzieren Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen in der komplexen Ebene.

2+2 = 4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei konvergente reelle Folgen mit den entsprechenden Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie anhand des ε-N-Kriteriums, dass die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \lambda(a_n + b_n)$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\lambda(a + b)$ konvergiert.

2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

(a) Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{4x^{2k}}.$$

Für welche x konvergiert sie? Werten Sie die Reihe für die konvergenten Fälle aus.

(b) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k)!}$$

absolut konvergiert.

(c) Untersuchen Sie die folgende Potenzreihe. Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}(x - 10)^n.$$

1+1+1 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| + \frac{2}{1+|x|}$.

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass die Funktion f stetig ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

2+1+1 = 4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{5x}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom T_n vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0.5$. Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler

$$\|f - T_n\|_\infty := \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - T_n(x)|,$$

die nur von $n \in \mathbb{N}$ abhängt (und nicht von x).

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} = \sqrt{x} - 1$ genau eine Lösung $x \in [0, 4]$ hat.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum hat.

2+2 = 4Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Bestimmen Sie die Integrale

a)

$$\int_2^{10} \frac{7}{3t(\ln t)^2}\, dt$$

b)

$$\int_0^2 x\, e^{3x}\, dx.$$

1+1 = 2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

a) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 t \exp(-t^2) dt.$$

b) Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx$$

und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals.

1,5+1,5 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 10.

Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geq 0\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0\}$,

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : A^{-1}x = 0\}$,

(d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n :$ es existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = A^{-1}y\}$.

0,5+0,5+1+1 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 11.

Im Vektorraum $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, also dem Raum der Polynome vom Grade kleiner-gleich 3 über $\mathbb{R}$, sind sowohl

$$\mathscr{B} := \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$$

mit $b_0(x) = 1,\ b_1(x) = x,\ b_2(x) = x^2$ und $b_3(x) = x^3$, als auch

$$\mathscr{C} := \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$$

mit $c_0(x) = x^2,\ c_1(x) = 2x^2 - 1,\ c_2(x) = x^2 - x$ und $c_3(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$, Basen von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Sei $\phi : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$p \mapsto \phi(p) := \frac{d}{dx}p.$$

a) Bestimmen Sie, die Matrixdarstellungen der lineare Abbildungen ϕ und $\psi := \phi \circ \phi$ jeweils bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

b) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung der lineare Abbildungen ϕ und $\psi := \phi \circ \phi$ jeweils bezüglich der Basis $\mathscr{C}$ von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

c) Ist die Abbildung ϕ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

1,5+1,5+1 = 4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 12.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = 1$ an.

3+1+1 = 5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Sei $V = C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f, g \in V.$$

Bestimmen Sie die Bestapproximation $u^* \in U$ des Unterraums

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

an die Funktion $f \in V$ mit $f(x) = \sin(x)$.

Hinweis: Eine Orthonormalbasis von U ist gegeben durch

$$u_0(x) = 1,\ u_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ u_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Hinweis: Partielle Integration kann zum Lösen auftretender Integrale hilfreich sein.

4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 14.

Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a \in \mathbb{R}$:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

1,5+1,5 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Wann ist $A^T A$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Wann ist $(A^T A + \alpha I_n)$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von $(A^T A + \alpha I_n)^{-1} A^T A$.

1+1+2 = 4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.: