Vertr.-Prof.
Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Dr. Jörn Ungermann
Edilbert Christhuraj
Dr. Georgii Oblapenko

Applied and Computational Mathematics

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2023
Klausur | 01.03.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 15.03.2024 von 10:00 - 12:00 Uhr im Konferenzraum 1132|503 - HKW 4 (1132|503) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	2.0	1.5	1.5	3.0	3.0	3.5	4.0	4.5	3.0	4.0	4.0	3.0	4.0	4.0	5.0	50
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie folgende Gesetzmässigkeit mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{wobei} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.0 Punkte

Aufgabe 2.

Sei die komplexe Zahl

$$z(t) := \sqrt{t}\cos\left(t^2\right) + i\sqrt{t}\sin\left(t^2\right), \qquad \text{wobei} \qquad t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}.$$

Finden Sie die Exponentialdarstellung von

a) $z(t)$,

b) $\overline{z(t)}$,

c) $iz(t)$,

d) $\overline{iz(t)}$,

e) $z^2(t)$,

f) $|z(t)|$.

Hinweis: Ggf. hilft die Verwendung der Eulerschen Formel

6×0.25 **Punkte**

Aufgabe 3.

Sei die Folge $\{y_n\}$ durch

$$y_n := \frac{1+n}{n^2-n+10}, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert. Untersuchen Sie die Folge y_n auf

- Monotonie,
- Beschränktheit,
- Konvergenz.

Wenn die Folge konvergiert, zeigen Sie dies mittels der Definition von Konvergenz.

1.5 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}.$$

Zeigen Sie, dass man mittels des Wurzelkriteriums die Konvergenz der Reihe zeigen kann, jedoch nicht mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

Hinweis: Es gilt für $a > 0$: $\sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

2.0+1.0 Punkte

Aufgabe 5.

a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$, mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Geben Sie das $\varepsilon - \delta$ Kriterium

(i) für die Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in I$.

(ii) für die gleichmäßige Stetigkeit von f auf I.

b) Sei $I = (0, 1)$ und die folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Analysieren Sie f auf gleichmäßige Stetigkeit.

1.0+2.0 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}.$$

a) Besitzt f Nullstellen?

b) Bestimmen Sie weiterhin $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Extrema.

0.5+1.0+2.0 Punkte

Aufgabe 7.

Betrachte $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2\, e^x$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

b) Berechnen Sie eine Annäherung für e, indem Sie $T_3(x)$ an einer geeigneten Stelle x^* auswerten. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers $|f(x^*) - T_3(x^*)|$ an.

2.0+2.0 Punkte

Aufgabe 8.

Berechnen Sie folgende Integrale

a) $\int \arctan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x(2x+5)}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

Hinweis:

- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.
- Sie können die Substitution $y = \sqrt{1-x}$ benutzen um das Integral im Teil c) zu vereinfachen.

1.5+1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 9.

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen zunächst auf punktweise, dann auf gleichmäßige Konvergenz:

a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, \quad 0 \leq x \leq 1$

b) $g_n(x) = e^{n(x-1)}, \quad 0 < x < 1$

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 10.

a) Untersuchen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_1(t) = \sin(t), \quad f_2(t) = \sin(2t), \quad f_3(t) = \sin(3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

linear unabhängig ist.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass

$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x = A^{-1}y\right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

1.5+1.0+1.5 Punkte

Aufgabe 11.
Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) \\ x_3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Matrix der Abbildung an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und Bildes der Abbildung.

2.0+2.0 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

2.0+1.0 Punkte

Aufgabe 13.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix aus m Spaltenvektoren a_i. Zeigen Sie, dass für eine gegebene Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Normalgleichung

$$A^T A x = A^T v,$$

mit $v \in \mathbb{R}^n$, der Vektor $u^* = Ax$, $u^* \in \mathbb{R}^n$, eine Bestapproximation von v im Spaltenraum von A ist, also dass

$$\|v - u^*\| \leq \min_{u \in \text{Span}(\{a_1,\ldots,a_n\})} \|v - u\|$$

gilt.

(b) Sei

$$U = \{p \in \mathbb{C}^\infty([-1,1]) \,|\, p(t) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

als Unterraum von $\mathbb{C}^\infty([-1,1])$ gegeben.
Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle f\,,\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$.
Bestimmen Sie die beste Approximation p^* von $q(t) = t^2 - t$ in U, d.h.

$$\|p^* - q\|_2 = \min_{p \in U} \|p - q\|_2$$

wobei $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

2.0+2.0 Punkte

Aufgabe 14.

Betrachten Sie die folgenden Matrizen und berechnen Sie die Determinanten mit minimaler Rechnung. Tipp: Benutzen Sie auch allgemein Eigenschaften der Determinante. Welche der Matrizen sind unter welchen Umständen invertierbar?

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 2 & 1 & \frac{22}{3} \\ 2 & 100 & -999 & \pi \end{pmatrix}$$

b) Mit $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & a \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ \frac{567}{3} & \sqrt{6} & 288 \end{pmatrix}$$

d) Mit $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

1.0+1.0+1.0+1.0 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben ist die reelle, symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $D = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist 26.

5.0 Punkte