Vertr.-Prof.
Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Donat Weniger
Vladimir Dordic

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2022
Klausur | 27.02.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 17.03.2023 von 14:00 - 15:00 Uhr im klPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	3.5	4.5	3	3.5	3	3	4	4	3	3	4.5	3	2	3	50
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie folgende Gesetzmäßigkeit mittels vollständiger Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

3 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die $z^4 = -4$ erfüllen.

(b) Seien $y, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$z \sim y \Leftrightarrow |z| = |y|$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Skizzieren Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen in der komplexen Ebene.

1.5+2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

a) Beweisen Sie anhand des ε-Kriteriums, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und geben Sie den Grenzwert an.

b) Geben Sie eine Formel für die Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

an und beweisen Sie diese durch ein Induktionsargument.
<u>Hinweis:</u> Die Betrachtung der ersten Partialsummen kann bei der Aufstellung einer Vermutung für die Formel hilfreich sein.

c) Geben Sie somit den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

2+1.5+0.5+0.5 Punkte

Aufgabe 4.

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2 + \sqrt{k}}$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert folgende Potenzreihe?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k+1}$$

1+2 Punkte

Aufgabe 5.
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion f. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty)$$

erfüllt.

(e) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

0.5+0.5+0.5+1.5+0.5 Punkte

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \exp(-2x^2).$$

3 Punkte

Aufgabe 7.
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ und $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die allgemeine Ableitung $f^{(n)}$ von f, $n \in \mathbb{N}$ an.

(b) Stellen Sie das Taylorpolynom T_n vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 auf.

(c) Geben Sie $T_3(x)$ an.

(d) Reicht $n = 3$ aus, damit der Fehler

$$\|f - T_n\|_\infty := \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - T_n(x)|$$

auf jeden Fall kleiner als 10^{-2} ist?

1+0.5+0.5+1 Punkte

Aufgabe 8.

Zeigen Sie zunächst:

a) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + c$$

Berechnen Sie die folgenden bestimmten oder unbestimmten Integrale

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+3}{x^3+3x+2} \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x$

Hinweis: Substituieren Sie $\theta = 4 - x^2$.

1+2+1 Punkte

Aufgabe 9.

Bestimmen Sie folgendes Integral mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 14}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} dx$$

Hinweis: Eine der Nullstellen des Polynoms im Nenner ist gegeben durch $x_0 = 2$.

4 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 10.

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren v_1, v_2, v_3 die daraus konstruierten Vektoren

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v_1 \\ \omega_2 &= v_2 - \frac{\omega_1 \cdot v_2}{\|\omega_1\|^2}\omega_1 \\ \omega_3 &= v_3 - \frac{\omega_1 \cdot v_3}{\|\omega_1\|^2}\omega_1 - \frac{\omega_2 \cdot v_3}{\|\omega_2\|^2}\omega_2 \end{aligned}$$

jeweils zueinander orthogonal sind.

c) Bestimmen Sie die zu $\{a, b, c\}$ gehörige Orthogonalbasis.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) \\ x_3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Matrix der Abbildung an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und Bildes der Abbildung.

1+2 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 + i\,c & 0 & i\,c \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & i\,c & 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass C für alle $c \in \mathbb{C} \backslash \{2i\}$ invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie für $c = 2i$ alle reellen Vektoren x mit

$$Cx = 0.$$

c) Invertieren Sie die Matrix für $c = i$.

1+1.5+2 Punkte

Aufgabe 13.

Sei $V = C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } f, g \in V.$$

Bestimmen Sie die Bestapproximation $u^* \in U$ des Unterraums

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

an die Funktion $f \in V$ mit $f(x) = \sin x$.

Hinweis: Eine Orthonormalbasis von U ist gegeben durch

$$u_0(x) = 1,\ u_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ u_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Hinweis: Partielle Integration kann zum Lösen auftretender Integrale hilfreich sein.

3 Punkte

Aufgabe 14.
Zur Bestimmung der Determinante nutzen wir die Blockgestalt der folgenden Matrix aus:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 8 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ \hline * & A_2 & 0 \\ \hline * & * & A_3 \end{array}\right)$$

Es gilt

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \det A_3$$

Bestimmen Sie $\det A$.

2 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenräume $ER(\lambda_i)$. Ist A diagonalisierbar?

3 Punkte

Name: Matriculation-Nr.: