Prof. Dr. Benjamin Stamm
Dr. Stefanie Braun
Paul Wilhelm

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2021/22
Klausur | 02.03.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 23.03.2022 von 10:00 - 13:00 Uhr im H01 Carl statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
Punkte	4	9	9	8	7	10	12	7	9	6	9	10	100
Ihre Punkte													

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Beweisen Sie anhand vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{(2n-1)\,n\,(2n+1)}{3}$$

gilt.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Geben Sie die Definition einer injektiven Abbildung an.

b) Sind die ganzen Zahlen abzählbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

c) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\sup(a, b) = b.$$

1+3+2+3 Punkte

Aufgabe 3.

a) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   i) $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n-1}$

   ii) $a_n = \frac{4n^2+1}{2n^3+n^2}$

   Hinweis: Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

b) Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit

$$a_n = z^n \quad \text{mit} \quad z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$
$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_n.$$

   Bestimmen Sie die konvergenten Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und deren Grenzwert.
   Hinweis: Betrachten Sie die Beträge.

c) Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist.

4+3+2 Punkte

Aufgabe 4.

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{5}{(3j+1)(3j+4)}$$

konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{5}{(3j+1)(3j+4)} = \frac{A}{3j+1} - \frac{B}{3j+4}.$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi) \left(\frac{x}{2}\right)^n ?$$

4+4 Punkte

Aufgabe 5.

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

i)

$$\lim_{x \to -2} \frac{4x+1}{3x-1}$$

ii)

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{3-3x} - \frac{1}{(1-x)(1+2x)} \right]$$

b) Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion

$$h:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

mittels der ε-δ-Definition. Ist h auch gleichmäßig stetig?

4+3 Punkte

Aufgabe 6.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$.

b) Benutzen Sie den Mittelwertsatz, um die Einschließung

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \forall x \in (1, \infty)$$

zu zeigen.
Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = \ln(t)$.

c) Auf welchem Teilintervall I von $(0, \infty)$ ist f konvex?

i) $f(x) = x^2 - 100x$

ii) $f(x) = x^4 - 2x^2$

3+3+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

a) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-x^4} dx.$$

b) Bestimmen Sie Stammfunktion von

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

und geben Sie geeignete Bedingungen an f an, damit das Integral existiert.

c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit

$$e^{\xi} \quad = \quad \frac{e^b - e^a}{b - a}.$$

d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^R x^n e^{-x} dx, \qquad R > 0,\ n \in \mathrm{N}$$

Hinweis: Verfahren Sie rekursiv.

3+3+2+4 Punkte

Aufgabe 8.

a) Untersuchen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_1(t) = \sin(t), \quad f_2(t) = \sin(2t), \quad f_3(t) = \sin(3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

linear unabhängig ist.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass

$$V \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \exists y \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x = A^{-1}y\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

2+2+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

a) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_3) \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Matrix der Abbildung und bestimmen Sie deren Rang, eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der Abbildung.

b) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \mathsf{span}\{u_1, u_2\} \subset V$ mit $u_1 = (1, 2, 0)^T$ und $u_2 = (1, 1, 0)^T$. Für welchen Vektor $u^* \in U$ gilt

$$\|u^* - v_1\|_2 \leq \|u - v_1\|_2 \quad \text{für alle } u \in U$$

mit $v_1 = (3, 2, 1)^T$?

5+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

a) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von α und β derart, dass das LGS

(i) genau eine Lösung,

(ii) keine Lösung,

(iii) unendlich viele Lösungen

besitzt. Für Fall (i) geben Sie bitte die eindeutige Lösung in Abhängigkeit von den Parametern α und β an.

b) Berechnen Sie das Matrix-Produkt $A \cdot B$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die dazugehörige lineare Abbildung $\Phi_{A \cdot B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an und spezifizieren Sie $n, m \in \mathbb{N}$.

4+2 Punkte

Aufgabe 11.

a) Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Beweisen Sie

(i) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(ii) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ für alle invertierbaren $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2+7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 12.

a) Sei $\Phi : V \to V$ eine unitäre Abbildung über den $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $\Phi^{-1} = \Phi^*$.

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte λ einer orthogonalen Matrix A die Eigenschaft $|\lambda| = 1$ erfüllen.

2+5+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: