Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2020/21
Klausur | 16.04.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am TBA von TBA Uhr im Zoom statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	7	6	7	8	7	7	9	5	6	6	8	7	6	8	100
Ihre Punkte																

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Beweisen Sie, dass $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 5 teilbar ist.

3 Punkte

Aufgabe 2.

Betrachten Sie den Funktionenraum $F = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$. Entscheiden Sie mit Begründung ob die Funktionen in folgenden Teilmengen von F linear abhängig oder unabhängig sind. Geben Sie im Fall der linearen Abhängigkeit eine Darstellung der Nullfunktion und die größte linear unabhängige Teilmenge an.

(a) $A = \{f, g, h\} \subset F$ mit

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = 2e^x$$

(b) $A = \{f, g, h\} \subset F$ mit

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = 2 + x, \quad h(x) = 1 + 2x$$

(c) $A = \{f, g\} \subset F$ mit

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \ln(x+1)$$

(d) $A = \{f, g\} \subset F$ mit

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x)$$

2+2+1+2 Punkte

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von

a) $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 0\}$

b) $V = \mathsf{span}\{1 - 2x, 2x - x^2, 1 - x^2, 1 + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$

4+2 Punkte

Aufgabe 4.
Betrachten Sie die beiden Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus dem $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x = \alpha\, u + \beta\, v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

(c) Welcher Vektor $u^\star \in U$ ist die beste Approximation von

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ?$$

(d) Wie lautet die Abbildung der Bestapproximation $\overline{u}^\star : \mathbb{R}^3 \to U$ für einen allgemeinen Vektor

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$?

1+3+2+1 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben seien die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ y + 5x \end{pmatrix}$$

und

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto x + y + z$$

a) Zeigen Sie die Linearität der Abbildungen φ und ψ.

b) Identifizieren Sie jeweils die zugehörige Matrix.

c) Bilden Sie die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ und geben Sie die Matrix an.

d) Diskutieren Sie die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$.

3+2+2+1 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = 1$ an.

3+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Betrachten Sie die folgenden Matrizen und berechnen Sie die Determinanten mit minimaler Rechnung. Tipp: Benutzen Sie auch allgemein Eigenschaften der Determinante. Welche der Matrizen sind unter welchen Umständen invertierbar?

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 2 & 1 & \frac{22}{3} \\ 2 & 100 & -999 & \pi \end{pmatrix}$$

(b) Mit $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & a \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ \frac{567}{3} & \sqrt{6} & 288 \end{pmatrix}$$

(d) Mit $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

2+2+1+2 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) Geben Sie ein α an, sodass B diagonalisierbar ist, mit orthogonalen Eigenvektoren? Warum?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B für $\alpha = 3$. (Tipp: Ein Eigenwert ist $\lambda = -2$)

(c) Zeigen Sie: Für $\alpha = 0$ lautet das charakteristische Polynom $p_B = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$ mit Nullstellen $\lambda \in \{-2, 0, 1\}$

(d) Zeigen Sie, dass B mit $\alpha = 0$ <u>nicht</u> diagonalisierbar ist.

1+4+2+2 Punkte

Aufgabe 9.

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^6 = 64i.$$

b) Geben Sie die erste archimedische Eigenschaft:
"Für jedes $x \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$ "
mit den logischen Quantoren $\forall, \exists$ an. Beweisen Sie anschliessend die Aussage.
Tipp: Beweis durch Widerspruch.

2+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

a) Untersuchen Sie die folgende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n = \frac{4n^2 + 100}{8n^2 - 3n}, \quad b_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 7n} - 2n}{8n}.$$

b) Beweisen Sie mittels der Definition die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{1}{n^2}.$$

4+2 Punkte

Aufgabe 11.

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k + 3^{k-1}}{5^k}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi) \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

4+2 Punkte

Aufgabe 12.

Sei $f_k : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_k(x) = \begin{cases} \ln(x) \cdot x^k & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Was ist das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $f_2 \notin C^n((-1, 1))$? Hierbei bezeichnet $C^n((-1, 1))$ die Menge der reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $(-1, 1)$, die n-mal stetig differenzierbar sind.

b) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung von f_1 um den Punkt $x = 1$ an und bestimmen Sie den Konvergenzradius.
Tipp: Benutzen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\ln(1 + y)$.

4+4 Punkte

Aufgabe 13.
Sei

$$f_0(x) = \begin{cases} x(2-x) & x \in [0,2] \\ -(x-2)(4-x) & x \in (2,4] \end{cases}$$

und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von f_0 auf $\mathbb{R}$

$$f(x) = f_0(x-4k) \qquad \forall x \in [4k, 4(k+1)],\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

a) Analysieren Sie f auf Differenzierbarkeit.

b) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $f(x) = x$?

4+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 14.
Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) Finden Sie alle Minima der Funktion f.

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $x = \frac{1}{\pi}$.

4+2 Punkte

Aufgabe 15.

a) Zeigen Sie anhand des Zwischenwertsatzes den Mittelwertsatz der Integralrechnung, d.h. Für $f \in C^0([a,b])$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x \ \mathsf{exp}(10 - x^2)\,dx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx.$$

3+3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: