Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Sebastian Krumscheid, Ph.D.

**Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!**

# Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2019/20
# Klausur | 02.03.2020

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

**Hinweise:**

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 19.03.2020 von 09:00–12:00 Uhr im 1090|334 klPhys, Rogowski Gebäude, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

**Matrikelnummer:** ___ ___ ___ ___ ___ ___

**Name, Vorname:** ______________________________

**Unterschrift:** ______________________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 6 | 4 | 3.5 | 4.5 | 6 | 5.5 | 4 | 4 | 53.5 |
| Ihre Punkte | | | | | | | | | | | | | | |

| Klausur | | Bonus | | Gesamt |
|---|---|---|---|---|
| | + | | = | |

Note:

**Aufgabe 1.**
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

„Die Zahl $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ ist durch $5$ teilbar“.

Schreiben Sie klar und eindeutig die Aussage hin, die Sie zeigen möchten. Stellen Sie jeden Induktionsschritt (IA, IV u. IS) eindeutig und separiert dar.

**3 Punkte**

**Aufgabe 2.**
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ als

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$
$$z_2 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} i = \frac{1}{5}(3-4i).$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $z_1^\alpha = 1$? Nennen Sie alle möglichen Werte von $\alpha$ und begründen Sie ihre Antwort.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $z_1^\alpha = z_1$? Nennen Sie alle möglichen Werte von $\alpha$ und begründen Sie ihre Antwort.

(c) Berechnen Sie $z_2^2$ sowie $\overline{(z_2^2)}$.

(d) Bestimmen Sie nun den Polarwinkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ der komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ab, wobei

$$z = \frac{(1+i)(1-i)(42i-42)}{(2+2i)(2-2i)(\pi+\pi i)}$$

und $r \in \mathbb{R}$.

**1.5+0.5+1+1 Punkte**

**Aufgabe 3.**

a) Geben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge durch das $\varepsilon$-$N$-Kriterium an.

b) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei konvergente reelle Folgen mit den entsprechenden Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie anhand des $\varepsilon$-$N$-Kriteriums, dass die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \lambda(a_n + b_n)$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\lambda(a+b)$ konvergiert.

**1+2 Punkte**

**Aufgabe 4.**
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^3 - 3n - 1}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n 2^{-n^2}$$

**1.5+1.5 Punkte**

**Aufgabe 5.**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| + \frac{2}{1+|x|}$.

(a) Zeigen Sie mittels der $\varepsilon$-$\delta$-Definition, dass die Funktion $f$ stetig ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem $f$ gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

**2+0.5+0.5 Punkte**

**Aufgabe 6.**

Gegeben sei die stetige und differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sin(\ln(1 + x^2)).$$

Sie dürfen annehmen, dass die erste Ableitung dieser Funktion $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist.

i) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von $g$.

ii) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen und alle lokalen und globalen Maxima und Minima.

**1.5+4.5 Punkte**

**Aufgabe 7.**

(a) Zeigen Sie, dass es genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass $\hat{x} = \cos(\hat{x})$ gilt.

(b) Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $x \mapsto \cos(2\pi x)$ um die Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ sowie $x_3 = 1$.

**2.0+2.0 Punkte**

**Aufgabe 8.**

a) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 t \operatorname{exp}(-t^2)dt.$$

Nutzen Sie Integrationsregeln, um die Stammfunktion zu bestimmen. Sie müssen nicht überprüfen, dass der Integrand integrierbar ist.

b) Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx$$

und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals.

**1.5+2.0 Punkte**

**Aufgabe 9.**

Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\phi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \phi(b_2) = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \phi(b_3) = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

für $b_1 = (1,0,0)^T$, $b_2 = (1,1,0)^T$ und $b_3 = (1,1,1)^T$ wobei $a \in \mathbb{R}$.

a) Worauf wird $x = (1,2,-1)^T$ durch $\phi$ abgebildet? D.h. bestimmen Sie $\phi(x)$.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ jeweils den Kern und das Bild der Abbildung $\phi$. Geben Sie außerdem deren Dimensionen an.

c) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist $\phi$ surjektiv?

d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\phi$ bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$.

**1+2+0.5+1 Punkte**

**Aufgabe 10.**

I) Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $y \in \mathbb{R}^n,\ y \neq 0$ gegeben. Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob die Menge $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle \leq 0\}$,

b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 1\}$,

c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$,

d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x$ ist ein Eigenvektor von $A\}$,

e) $U = \text{span}\,\{v_1, v_2\}$ wobei $v_1 = (a^2, 1, b)^T, v_2 = (b, -1, 1)^T$ und $n = 3$ gilt. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt $U$ die Dimension 2?

II) Sei nun $U = \{f : D \to \mathbb{R},\ f$ ist ein Polynom vom Grad $\leq 3\}$ und $V = C^\infty(D, \mathbb{R})$, der Raum aller unendlich oft stetig differenzierbarer Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}$. Ist $U$ ein Untervektorraum von $V$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**1+1+1+1+1+1 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 11.**

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \geq 0$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $A$ aus Aufgabenteil a) in Abhängigkeit vom Parameter $a \geq 0$.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A$ aus Aufgabenteil a) für $a = 2$. Ist die Matrix $A$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

**0.5+1+4 Punkte**

**Aufgabe 12.**
Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Bestapproximation von $v_3$ durch ein Element $u^* \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass der Residuumsvektor $r = v_3 - u^*$ orthogonal zum Unterraum $U$ ist.

(c) Sei $A = (v_1 \mid v_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ die Matrix mit Spalten $v_1$ und $v_2$. Ferner sei $x^* \in \mathbb{R}^2$ der Koeffizientenvektor, so dass $u^* = Ax^*$. Zeigen Sie, dass $x^*$ die Gleichung

$$A^T A x^* = A^T v_3$$

erfüllt.
*Hinweis:* Benutzen Sie die Tatsache, dass $v_3 - u^* = v_3 - Ax^*$ orthogonal auf $\text{Im}(A) = \{Ay \,:\, y \in \mathbb{R}^2\}$ steht.

**2+1+1 Punkte**

**Aufgabe 13.**

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2\alpha & -2 & -2-2\alpha \\ 2 & 2 & 4 & 1-\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = 1$, $\beta = 1$ an.

**1.5+1.5+1 Punkte**