Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Benjamin Stamm

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2018/19
Klausur | 07.03.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 20.03.2019 von 12:00–14:00 Uhr im 1090|328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Punkte	3	4	6	2	5	4	3.5	3.5	7	4.5	4.5	4	4	55
Ihre Punkte														

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß die Ausdrücke $i = \sqrt{-1}$, $i > 0$, $i < 0$ auf Widersprüche der Form $-1 = 1$, $-1 > 0$, $1 < 0$ führen.

(b) Sei $Z_\alpha = \alpha \dfrac{\alpha\, i + 1}{\alpha - 1}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^2 = \overline{Z_\alpha}$ und tragen Sie diese zusammen mit Z_α in die Gauß'sche Zahlenebene ein (mit $\alpha = 4$)

1+3 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

a) Beweisen Sie anhand des ε-Kriteriums, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und geben Sie den Grenzwert an.

b) Geben Sie eine Formel für die Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

an und beweisen Sie diese durch ein Induktionsargument.
Hinweis: Die Betrachtung der ersten Partialsummen kann bei der Aufstellung einer Vermutung für die Formel hilfreich sein.

c) Geben Sie somit den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

2+2+1+1 Punkte

Aufgabe 4.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

a) Sei w eine positive irrationale Zahl. Zeigen Sie, dass es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $a < wr < b$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass wr eine irrationale Zahl ist.

1+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

b) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1) $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{4n-2}$

2) $a_n = \frac{4n^2+7}{2n^3+3n^2}$

2+1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 6.

a) Auf welchem Teilinterval von $[0, 2\pi]$ ist die Funktion $f(x) = \cos(x)$ konvex? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ stetig ist.

c) Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ auf dem Intervall $[0, 2]$ gleichmässig und/oder Lipschitz stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1+2+1 Punkte

Aufgabe 7.

a) Sei f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ und umkehrbar mit Umkehrfunktion f^{-1}. Leiten Sie die Umkehrregel

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}, \qquad \text{mit} \quad y_0 = f(x_0)$$

her.

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sin(\pi(x-1))\cos(\pi x)}$$

und finden Sie somit die stetige Fortsetzung in $x = 1$.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 + 6x - 11.$$

Geben Sie sowohl das Taylorpolynom ersten Grades im Punkt $x_0 = 2$ als auch die Fehlerfunktion an. Für welches Intervall um $x_0 = 2$ ist die Annäherung mit dem Taylorpolynom ersten Grades genauer als 0.01?

1+1+1.5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Geben Sie an für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha} dx$$

existiert. Falls dieses existiert, geben Sie den Wert an.

3.5 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

4+3 Punkte

Aufgabe 10.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = 1\}$

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = 0\}$

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 = 0\}$

(d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 = 0\}$

(e) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 x_2 = 0\}$

(f) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + 3x_2 = 0\}$

Geben Sie für die Unterräumen eine Basis im Fall $n = 3$ an.

0.5+1+0.5+1+0.5+1 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) Geben Sie ein α an, sodass B diagonalisierbar ist, mit orthogonalen Eigenvektoren? Warum?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B für $\alpha = 3$.
(Tipp: Ein Eigenwert ist $\lambda = -2$)

(c) Zeigen Sie: Für $\alpha = 0$ lautet das charakteristische Polynom
$p_B = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$ mit Nullstellen $\lambda \in \{-2, 0, 1\}$

(d) Zeigen Sie, daß B mit $\alpha = 0$ nicht diagonalisierbar ist.

0.5+2+1+1 Punkte

Aufgabe 12.

(a) Sei

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als Unterraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben.
Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle u\,,\,v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$.
Geben Sie eine Orthonormalbasis von U an und berechnen Sie die beste Approximation $x^* \in R^3$ von $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in U, d.h.

$$\|x^* - y\|_2 = \min_{x \in U} \|x - y\|_2$$

wobei $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

(b) Sei

$$U = \{p \in \mathbb{C}^\infty([-1,1]) \,|\, p(t) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t\}$$

als Unterraum von $\mathbb{C}^\infty([-1,1])$ gegeben.
Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle f\,,\,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.
Bestimmen Sie die beste Approximation p^* von $q(t) = t^2 - t$ in U, d.h.

$$\|p^* - q\|_2 = \min_{p \in U} \|p - q\|_2$$

wobei $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

2+2 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = 1$ an.

1.5+1.5+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: