Professor Dr. Benjamin Berkels
Professurvertreter Dr. Jan Giesselmann

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2017
Klausur | 15.03.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 26.03.2018 von 10:00–13:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	4	4,5	2	4	2,5	2	3	3	3,5	3	4	3	3	2	46,5
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]   Note: [ ]

Aufgabe 1.
Die Fibonacci-Folge $\{x_k\}$ ist durch

$$x_1 := 1, \qquad x_2 := 1, \qquad x_k := x_{k-1} + x_{k-2}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_n x_{n+1}$$

gilt.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Untersuchen Sie die folgende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n = \frac{6n^2+6}{2n^3+5n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{16n^2+4}-4n}.$$

b) Beweisen Sie mittels der Definition die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{n^2}{4n^2-2}.$$

4 Punkte

Aufgabe 3.

(a) Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2-1}{4x^{2k}}.$$

Für welche x konvergiert sie? Werten Sie die Reihe für die konvergenten Fälle aus.

(b) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k)!}$$

absolut konvergiert.

(c) Untersuchen Sie die folgende Potenzreihe. Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}(x-10)^n$$

.

4,5 Punkte

Aufgabe 4.

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x)\, x^{1/4}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ stetig?

2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(x^2 - 4)$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

b) Sei $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $0 < \delta \leq 1$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_2(x)|.$$

4 Punkte

Aufgabe 6.

(a) Wie viele Extremstellen kann das Polynom

$$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

maximal besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Finden Sie alle Extremstellen der Funktion $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$ im Intervall $(-3, 3)$.

(c) Besitzt die Gleichung $(x^2 - 9)(x^2 + 1) = -4\pi$ eine Lösung im Intervall $(-3, 3)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + 9a^2x^2 & \text{falls } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Was ist das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $f \notin C^n((-1,1))$? Hierbei bezeichnet $C^n((-1,1))$ die Menge der reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $(-1,1)$, die n-mal stetig differenzierbar sind. Untersuchen Sie, wie die Antwort von a abhängt.

2 Punkte

Aufgabe 8.
Berechnen Sie die Integrale

$$\text{a)} \int_0^\infty ax^2 \exp(1 - x^3)\,dx \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4(x)\cos(x)\,dx.$$

3 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

3,5 Punkte

Aufgabe 11.

a) Betrachten Sie die Abbildung $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$f(x) = ax^3/2, \qquad a \in [-2,2].$$

Für welche $a \in [-2,2]$ ist die Abbildung f surjektiv, injektiv, bijektiv?

b) Betrachten Sie die Abbildung $h\colon [0,2\pi] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$h(x) = \cos(3ax), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung h surjektiv, injektiv, bijektiv?

3 Punkte

Aufgabe 12.

Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a, x\rangle \geq 0\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0\}$,

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A^{-1}x = 0\}$,

(d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon$ es existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = A^{-1}y\}$.

4 Punkte

Aufgabe 13.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die zugehörige Darstellungsmatrix an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 14.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.

Beweisen Sie, dass, wenn A eine unitäre Matrix ist, alle Eigenwerte von A einen Betrag von eins haben.

2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: