Prof. Dr. Sebastian Noelle
Prof. Dr. Benjamin Stamm
Andreas Smolenko
Muhammad Hassan

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2016/17
Klausur | 23.03.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 31.03.2017 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
Punkte	4,5	5	4	4	4	3,5	3	4	4	2	3	3	3	3	50
Ihre Punkte															

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ a & 2 & \frac{1}{a} \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=b}. \tag{1}$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ hat das System (1) keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das System (2) keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{b}} \tag{2}$$

2,5 + 0,5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom die Form

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Sp}(A)\lambda + \det(A)$$

hat.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1,0 + 4,0 Punkte

Aufgabe 3.

a) Betrachten Sie die Abbildung $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$f(x) = ax^3, \qquad a \in [-1,1].$$

Für welche $a \in [-1,1]$ ist die Abbildung f surjektiv, injektiv, bijektiv?

b) Betrachten Sie die Abbildung $h\colon [0,2\pi] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$h(x) = \cos(ax), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung h surjektiv, injektiv, bijektiv?

c) Betrachten Sie die Abbildung $g\colon [0,2\pi] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$g(x) = \sin(ax), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung g surjektiv, injektiv, bijektiv?

1,0 + 1,5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a, x\rangle \leq 0\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 1\}$,

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A^{-1}x = 0\}$,

(d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon$ es existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = A^{-1}y\}$.

1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 Punkte

Aufgabe 5.
Seien

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U := \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle a, x \rangle = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Wie groß ist die Dimension von U?

b) Berechnen Sie die Bestapproximation von b bezüglich U, d.h. finden Sie $v^* \in U$ mit

$$\|v^* - b\| \leq \|v - b\| \quad \text{für alle } v \in U.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von U.

1,5 + 2,5 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \phi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Berechnen Sie eine Basis des Bildes sowie des Kerns der linearen Abbildung ϕ.

1,5 + 2,0 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

1,0 + 2,0 Punkte

Aufgabe 8.

(a) Bestimmen Sie die folgende Ableitung

$$\frac{d}{dy}\tan(y) = 1 + \tan^2(y).$$

Bestimmen Sie damit die folgende Ableitung

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2 + 5x + 1}{(x-4)(x^2+4x+5)} dx.$$

2,0+2,0 Punkte

Aufgabe 9.

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Folgen

a)

$$a_n = \frac{6n^2}{2n-1} - \frac{3n^2+2n+1}{n+2}$$

b)

$$b_n = \sqrt[\log(2n)]{n}$$

für $n \to \infty$.

2,0+2,0 Punkte

Aufgabe 10.

Untersuchen Sie die folgende Potenzreihe. Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}(x-5)^n$$

2,0 Punkte

Aufgabe 11.

Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log(1 + x)$.

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_n(x)$ bis zur n-ten Ordnung (Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$) und das Restglied $R_{n+1}(x, x_0)$.
Hinweis: Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von $f(x)$ ($k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) durch

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

gegeben ist.

b) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds für $x \in [0, 1]$ ab und zeigen Sie, dass dieser durch

$$|R_{n+1}(x, 0)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

gebunden ist.

2,0+1,0 Punkte

Aufgabe 12.

Bestimmen Sie das folgende uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2} dx.$$

3,0 Punkte

Aufgabe 13.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt $f \in C^0([a, b])$ und f monoton steigend. Sei

$$Z_1 = (a, b), \qquad a < b$$

eine aus zwei Punkten bestehende Zerlegung des Intervals $[a, b]$. Sei

$$Z_2 = (a, x^*, b), \qquad a < x^* < b$$

eine weitere Zerlegung des Intervals $[a, b]$. Zeigen Sie, dass für die Obersummen die Relation

$$O(f, Z_2) \leq O(f, Z_1)$$

gilt. Gilt diese Relation auch, wenn f nicht monoton steigend ist?

3,0 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie das größte $k \in \mathbb{N}$, sodass $f \in C^n([-1,1])$ n-mal stetig differenzierbar mit $n \in \mathbb{N}$ ist und $0 \leq n \leq k$ gilt.

3,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: