Dr. Graham Alldredge
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2015/16
Klausur | 24.03.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 06.04.2016 von 14–16 Uhr im Hörsaal kl. Phys (1090|334) im 3. Stock des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	2,5	3,5	3	3	3	4	4	3,5	4	3	4	3	3	4,5	2	50
Ihre Punkte																

Klausur ______ + Bonus ______ = Gesamt ______

Note: ______

Aufgabe 1.

Die Fibonacci-Folge $\{x_k\}$ ist durch

$$x_1 := 1, \qquad x_2 := 1, \qquad x_k := x_{k-1} + x_{k-2}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_n x_{n+1}$$

gilt.

2,5 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die $z^4 = -4$ erfüllen.

(b) Seien $y, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$z \sim y \Leftrightarrow |z| = |y|$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Skizzieren Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen in der komplexen Ebene.

1,5+2 Punkte

Aufgabe 3.

Es seien zwei Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ durch

$$x_n := \frac{1}{1 + \exp(n)\cos(\pi n)} \qquad \text{und} \qquad y_n := \frac{1 - n + n^2}{1 + n}$$

definiert. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz. Wenn eine Folge konvergiert, zeigen Sie dies mittels der Definition von Konvergenz.

3 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^k}.$$

Für welche x konvergiert sie? Werten Sie die Reihe für die konvergenten Fälle aus.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(k) \left(\frac{1}{4} + \exp(-k) \right)^k$$

absolut konvergiert.
Hinweis: $\exp(1)$ ist ungefähr 2.7183.

2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| + 1 + (1 + |x|)^{-1}$.

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass die Funktion f stetig ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

2+0,5+0,5 Punkte

Aufgabe 6.

(a) Finden Sie die erste und zweite Ableitungen von $f(x) = (1 + \sin x)^2$.

(b) Finden Sie die Parabel $p(x)$, die sich am besten der Funktion lokal um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ annähert.

(c) Sei $I = [0, \pi]$. Bestimmen Sie eine sinnvolle Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - p(x)|.$$

1+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 7.

Seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + 3ax^2 & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Was ist das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $f \notin C^n((-1,1))$? Untersuchen Sie, wie die Antwort von a abhängt.

4 Punkte

Aufgabe 8.

(a) Wie viele Extremstellen kann das Polynom

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

maximal besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Finden Sie alle Extremstellen der Funktion $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ im Intervall $(-2, 2)$.

(c) Besitzt die Gleichung $(x^2 - 4)(x^2 - 1) = \pi$ eine Lösung im Intervall $(-2, 2)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

0,5 + 2 +1 Punkte

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x}\, dx$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \arctan(x)\, dx$$

wobei $e = \exp(1)$.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 10.

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind.

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 = 2 \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 = v_3 \right\}$

(c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_2 \text{ oder } v_1 = v_3 \right\}$

1+1+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 11.
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2a \\ 6 & 3a & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das System keine, genau eine, mehr als eine Lösung?

b) Berechnen Sie alle Lösungen für $a = 3$.

3,5+0,5 Punkte

Aufgabe 12.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass der Residuumsvektor $r = v_3 - u^*$ orthogonal zum Unterraum U ist.

2+1 Punkte

Aufgabe 13.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 4x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die zugehörige Darstellungsmatrix an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung.

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A die Form

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda + 3)^2$$

hat.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Ist diese Matrix diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

2+2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante von A und geben Sie an, für welche Werte von a die Matrix regulär bzw. singulär ist.

2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: