Aufgabe 1.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt:

$$z^4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) Skizieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z) \,\wedge\, \mathrm{Re}(z) \leq 1 \,\wedge\, |z+2| \geq 1\}$$

2+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

a) Untersuchen Sie die beiden Folgen

$$a_n = \frac{2n^3 + 1}{4n^2 + 7n}, n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{\sqrt{25n^2 + 5n} - 5n}{5n + 4}, n \in \mathbb{N},$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{17n^2 - 7n}{n^2 - 4}, n \in \mathbb{N},$$

mit Hilfe der Definition.

2+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 12n}}$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{k}{n}\right)^n, \quad k \in \mathbb{R}$$

für $k <$ e konvergiert.

1,5 + 2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ Definition, dass $f(x)$ stetig ist.

b) Geben Sie ein Intervall an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass $\delta \leq \frac{1}{2}x_0$ gilt.

2,5+1 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \exp(\cos(x))$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ an.

b) Sei $I = [x_0 - 10^{-1}, x_0 + 10^{-1}]$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_2(x)|.$$

2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \exp(-2x^2).$$

3 Punkte

Aufgabe 8.

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) \cdot (\exp(x) - 1), & x \geq 0 \\ -(x+1) \cdot (\exp(x) - 1), & x < 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$.

3 Punkte

Aufgabe 9.

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x^2+3x}{(1+x^2)(2+x)}\mathsf{d}x.$$

4 Punkte

Aufgabe 10.

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist:

a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = 0\}$.

b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$.

c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 11.
Seien

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U := \mathsf{span}\{w_1, w_2\} \leq \mathbb{R}^4$ ein Untervektorraum. Bestimmen Sie die Bestapproximation von b bezüglich U, d.h. finden Sie $v^* \in U$ mit

$$\|v^* - b\| \leq \|v - b\| \quad \text{für alle } v \in U.$$

Tipp: Berechnen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von U.

3 Punkte

Aufgabe 12.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Berechnen Sie eine Basis des Bildes sowie des Kerns der linearen Abbildung ϕ.

1,5+2 Punkte

Aufgabe 14.

a) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha & 2 & 1 \\ \pi & \pi^2 & \pi^3 & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

Berechnen Sie $\det(A_\alpha)$. Wann ist die Matrix A_α singulär? D.h., bestimmen Sie ferner die Menge

$$M = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, A_\alpha \text{ ist singulär}\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Blockstruktur der Matrix A_α aus.

b) Bestimmen Sie die Determinate von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Matrix A die Form

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

hat.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und eine Basis der zugehörigen Eigenräume von A.
Hinweis: Alle Eigenwerte von A sind ganze Zahlen und nach dem Wurzelsatz von Vieta ist das Produkt der Nullstellen von p_A gleich 2 (mit algebraischer Vielfachheit gezählt), daher muss 2 oder -2 eine Nullstelle von p_A sein.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1+2,5+0,5 Punkte