Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen I (CES)

20.03.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte (inkl. Bonuspunkte).
- Die Klausureinsicht findet am 28.03.2014 von 10:00–11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Bei Rücktritt von der Klausur *vor* Beginn der Klausur ist ein Attest notwendig. Bei Rücktritt *nach* Beginn der Klausur ist unverzüglich eine Ärztin oder ein Arzt aufzusuchen. Auf dem Attest müssen Befundtatsachen, Datum und genaue Uhrzeit aufgeführt werden. Das Attest ist unverzüglich beim zentralen Prüfungsamt (ZPA) einzureichen. Nach Weiterleitung an den zuständigen Prüfungsausschuss entscheidet dieser über die Anerkennung.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3.5	3	5	4	4	3	3	3	3	2.5	3.5	4	3	2	3.5	50
Ihre Punkte																

Klausur (%) + Bonus (%) = Gesamt (%)

Note:

Aufgabe 1.
Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$48 \text{ ist Teiler von } \quad 5^{2n} + 24n - 1.$$

3.5 Punkte

Aufgabe 2.
Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben als

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^{11}}$$

Bestimmen Sie z in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und geben Sie Betrag und Argument von z in $(-\pi, \pi]$ an.

3 Punkte

Aufgabe 3.

a) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = n^2\, 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf Monotonie und Beschränktheit anhand der Definitionen. Was lässt sich hieraus folgern?
Hinweis: Es darf angenommen werden, dass $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ gilt.

b) Geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ der Folge

$$b_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

an und beweisen Sie, dass dies tatsächlich der Grenzwert ist mit Hilfe des ϵ-Kriteriums für Grenzwerte.

2.5+2.5 Punkte

Aufgabe 4.
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$$

1,5 + 2,5 Punkte

Aufgabe 5.

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen

a)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x-10}{(x-2)\sqrt{2x^2-4}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{(\sin(x))^2}$$

1.5 + 2.5 Punkte

Aufgabe 6.

Ein Läufer läuft insgesamt 2km in 10 Minuten. Zum Zeitpunkt t (in Minuten) hat er die Strecke $s(t)$ (gemessen in km) zurückgelegt. Die Funktion $s : [0, 10] \to \mathbb{R}$ sei stetig.
Zeigen Sie, dass es immer einen Zeitabschnitt in $[0, 10]$ von 5 Minuten gibt, in dem der Läufer genau 1 km durchläuft.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) = s(t + 5) - s(t) - 1$ auf $[0, 5]$.

3 Punkte

Aufgabe 7.

Die Funktion f sei gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Hinweis: Nutzen Sie $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$ aus.

3 Punkte

Aufgabe 8.

Es soll die nichtlineare Gleichung

$$\cos(x) = x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

näherungsweise gelöst werden.

a) Entwickeln Sie dafür $\cos(x)$ bis zur zweiten Ordnung in einer Taylorreihe um den Punkt $x = 0$. Nutzen Sie dies um die Gleichung zu lösen.

b) Geben Sie eine möglichst kleine Schranke für das Residuum $|\cos(x) - x|$ an.

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

a)
$$\int \frac{1}{\ln(x) \cdot x} dx$$

b)
$$\int (\sin(x))^2 dx$$

1.5 + 1.5 Punkte

Aufgabe 10.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass für $b \neq 0$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 immer linear unabhängig sind.

b) Finden Sie für $b = 0$ ein $a \in \mathbb{R}$, so dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

1.5+1 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die dazu gehörige Matrix und geben Sie ihren Rang und eine Basis des Kerns und des Bildes an.

3.5 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = 1$ an.

1.5 + 1.5 + 1 Punkte

Aufgabe 13.
Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

3 Punkte

Aufgabe 14.
Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & b & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \\ b & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

1+1 Punkte

Aufgabe 15.
Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Ist diese Matrix diagonalisierbar?
Hinweis: 4 ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix B.

3,5 Punkte