Aufgabenübersicht

Aufgabe 1 Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist:

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3\ ;\ 4z - x + 3y = 1\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3\ ;\ \frac{1}{2}z = 2x\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^2,\ U = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2\ ;\ \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Aufgabe 2 (a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen

$$z_1 = \overline{2 + \frac{2}{i}}, \qquad \text{und} \qquad z_2 = \left(\frac{9 - 3i}{2 + i}\right)^6,$$

wobei jeweils das Argument in $(-\pi, \pi]$ liegen soll.

(b) Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z, für die gilt:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{1 - \overline{z}}\right) \geq 1.$$

Aufgabe 3 Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 5x_3 - 3x_2 + x_1 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 \\ x_3 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

Aufgabe 4 Betrachte $f(x) = \cos(3x)$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom 4. Grades $T_4(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{6}$ an.

(b) Sei $I = [x_0 - 10^{-1}, x_0 + 10^{-1}]$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_4(x)|.$$

Aufgabe 5 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 1 ist.

(a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerten von A sowie den zum Eigenwert 1 zugehörigen Eigenvektor.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

(d) Es bezeichne I_3 die 3×3-Einheitsmatrix. Geben Sie die Eigenwerte von

$$B := A - 2I_3$$

an.

Aufgabe 6 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f and der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist.

Aufgabe 7 Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhänging sind.

(b) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 8 (a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \sqrt{n}\, \frac{\sqrt{4n^2 + 2n} - n}{3n + 6}$$

(b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{1 + 2 \cdot \mathrm{e}^n}{-5 + 3 \cdot \mathrm{e}^n}$$

mit Hilfe der Definition.

Aufgabe 9 Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ abgebildet?

(b) Geben Sie eine Darstellung vom Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.

Aufgabe 10 (a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)}.$$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin a_k$ konvergent ist.

Aufgabe 11 Gegeben seien die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Gibt es eine Diagonalmatrix, zu der sowohl M als auch N ähnlich sind? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T, so dass $M = T^{-1}NT$ gilt, also M ähnlich zu N ist.

Aufgabe 12 Begründen Sie die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrals und berechnen Sie es:

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$$

Aufgabe 13 (a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 9 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det A$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge zum Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14 Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$$

konvergiert bzw. divergiert.

Aufgabe 1.

Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist:

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3\ ;\ 4z - x + 3y = 1\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3\ ;\ \frac{1}{2}z = 2x\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^2,\ U = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2\ ;\ \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

1 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen

$$z_1 = \overline{2 + \frac{2}{i}}, \qquad \text{und} \qquad z_2 = \left(\frac{9 - 3i}{2 + i}\right)^6,$$

wobei jeweils das Argument in $(-\pi, \pi]$ liegen soll.

(b) Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z, für die gilt:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1 - \overline{z}}\right) \geq 1.$$

2.5 + 2.5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 5x_3 - 3x_2 + x_1 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 \\ x_3 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 4.

Betrachte $f(x) = \cos(3x)$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom 4. Grades $T_4(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{6}$ an.

(b) Sei $I = [x_0 - 10^{-1}, x_0 + 10^{-1}]$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_4(x)|.$$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 1 ist.

(a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerten von A sowie den zum Eigenwert 1 zugehörigen Eigenvektor.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

(d) Es bezeichne I_3 die 3×3-Einheitsmatrix. Geben Sie die Eigenwerte von

$$B := A - 2I_3$$

an.

1.5 + 1 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 6.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f and der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist.

2 Punkte

Aufgabe 7.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhänging sind.

(b) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

1 + 2 Punkte

Aufgabe 8.

(a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{4n^2+2n} - n}{3n+6}$$

(b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{1 + 2 \cdot \mathrm{e}^n}{-5 + 3 \cdot \mathrm{e}^n}$$

mit Hilfe der Definition.

3 + 1.5 Punkte

Aufgabe 9.

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ abgebildet?

(b) Geben Sie eine Darstellung vom Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 10.

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)}.$$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin a_k$ konvergent ist.

2.5 + 2 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben seien die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Gibt es eine Diagonalmatrix, zu der sowohl M als auch N ähnlich sind? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T, so dass $M = T^{-1}NT$ gilt, also M ähnlich zu N ist.

2.5 + 2.5 Punkte

Aufgabe 12.

Begründen Sie die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrals und berechnen Sie es:

$$\int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx.$$

3 Punkte

Aufgabe 13.

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 9 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det A$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge zum Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 14.

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$$

konvergiert bzw. divergiert.

3 Punkte