Aufgabe 1.

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

3 Punkte

Aufgabe 2.

Berechnen Sie den Imaginärteil von $z = (1 + i)^{51}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung in Polarkoordinaten.

2 Punkte

Aufgabe 3.

Für $\beta \geq 1$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = \beta,$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\beta}{a_n}\right).$$

(a) Finden Sie ein $\alpha > 0$, so dass

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$a_n \geq \alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{\beta}{x})$ für $x \geq \alpha$ monoton steigend ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt.

(d) Begründen Sie, warum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Vorangegangene Aufgabenteile dürfen benutzt werden, auch wenn sie von Ihnen nicht gelöst wurden.

1+1.5+1+1 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k \qquad \text{mit} \quad a_k = (-1)^k\, \frac{2^k\,(2k+1)}{k(k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe an.
Hinweis: Verwenden Sie das Quotientenkriterium $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent bzw. divergent? Betrachten Sie dazu auch die Ränder des Konvergenzbereiches.

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2 - 3x^2}}\right).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen und mögliche Kandidaten für Extrema.

(c) Geben Sie das maximale Intervall $I \subset D_f$ an, auf dem f monoton steigend ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$.

1+2+2 Punkte

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))},$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x+7}}{\sqrt{x}}.$$

2+1 Punkte

Aufgabe 7.

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(-x^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion f. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty)$$

erfüllt.
Hinweis: Machen Sie eine Extremwertuntersuchung der ersten Ableitung.

(e) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.

0.5+1+1+2+0.5 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachte $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x\,e^x.$

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_4(x)$ 4. Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(b) Berechnen Sie eine Annäherung für e, indem Sie $T_4(x)$ an einer geeigneten Stelle x^* auswerten. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers

$$|f(x^*) - T_4(x^*)|$$

an.

2+2 Punkte

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die Stammfunktion $\int f(x)\,dx$ zu $f(x) = x^3 \sin(x^2 + 1)$.
Hinweis: Substitution $z = x^2$.

2.5 Punkte

Aufgabe 10.

Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)}\,dx$$

existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

2.5 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrix der Abbildung an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 12.

Seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ gegeben. Bestimmen Sie die Bestapproximation von $\mathbf{v}_3$ durch ein Element $\mathbf{u}^*$ des Teilraums U.

3 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben ist die Werte-Tabelle für eine Funktion $y = f(x)$

i	0	1	2	3
x_i	-3	1	2	3
y_i	2	1	-1	0

(a) Finden Sie eine Approximation für $f(0)$ durch Interpolation mit Hilfe des Neville-Aitken Schemas für die ersten drei Punkte (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2$.

(b) Geben Sie das Lagrange-Interpolationspolynom $y = p(x)$ zu den Daten (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3$ an.

(c) Wie lautet der Interpolationsfehler in (b)?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 14.

Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-2, 2]$ mit zwei Stützstellen x_0, x_1 der Form

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f'(x_1),$$

wobei $x_0 = -1$ vorgegeben ist. Bestimmen Sie c_0, c_1 und x_1 so, dass der Genauigkeitsgrad möglichst groß wird.

2.5 Punkte

Aufgabe 15.

$Q(h)$ sei eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_0 h^2 + c_1 h^5 + c_2 h^8 + \dots$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Die Fehlerordnung von Q ist 3.

(a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{2}\right)$ mit einer Schrittweite $h < 1$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, daß Sie eine genauere Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral bekommen.

(b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| \leq C h^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ an.

1.5 + 0.5 Punkte