Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$133 \text{ ist Teiler von } \quad 11^{n+1} + 12^{2n-1}.$$

4 Punkte

Aufgabe 2. Skizzieren Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$\frac{\mathrm{Im}(z)}{(\mathrm{Re}(z))^2} \geq 1 \quad \text{und} \quad (\mathrm{Im}(z))^2 \leq 16.$$

3 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2nz+z^2}{n^2}\right)^n, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{3\sqrt{n}+1},$$

wobei $z \in \mathbb{R}$.

2+1 Punkte

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgende Reihe für $p = 1, 2, 3$ auf absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n := \frac{(n!)^p}{(2n)!}.$$

3 Punkte

Aufgabe 5. Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und bestimmen Sie die Kandidaten für Extremstellen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\sin(\cos(x)))$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{\exp(\arctan(2x))}{1 + 4x^2}$.

2+1,5 Punkte

Aufgabe 6. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin^2(x)}{x^4}\right).$$

Hinweis: Es gilt $2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

3 Punkte

Aufgabe 7. Setzen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1 + 2\sin(x-1) - x}{2x - 2}$$

stetig fort und zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f eine Nullstelle in $[1-\pi, 1]$ hat.

3 Punkte

Aufgabe 8. Berechnen Sie $\sqrt{17}$ näherungsweise, indem Sie für die Funktion

$$f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4\sqrt{1+x},$$

eine Taylorentwicklung 2. Grades durchführen. Geben Sie weiterhin eine obere Schranke für den Fehler an.

4 Punkte

Aufgabe 9. Begründen Sie die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrals und berechnen Sie es:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}} dt.$$

2 Punkte

Aufgabe 10. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $b \neq 0$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 immer linear unabhängig sind.

(b) Finden Sie für $b = 0$ ein $a \in \mathbb{R}$, so dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

1,5+1 Punkte

Aufgabe 11. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2(x_3 - x_2) \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die dazu gehörige Matrix und geben Sie ihren Rang und eine Basis des Kerns und des Bildes an.

3,5 Punkte

Aufgabe 12. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

3 Punkte

Aufgabe 13. Gegeben seien die folgenden Messwerte

x_i	-1	1	2
f_i	1	4	2

wobei f_i den Funktionswert an der Stützstelle x_i bezeichnet.

(a) Geben Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$, welches f an den Stellen x_0, x_1, x_2 interpoliert, in der Darstellung durch die Lagrange-Basis-Polynome an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville-Schemas den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 3$.

2+2 Punkte

Aufgabe 14. Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-2, 2]$ mit zwei Stützstellen x_0, x_1 der Form

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{dx} \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1),$$

wobei $x_0 = -1$ und $c_1 = 3$ vorgegeben seien. Bestimmen Sie c_0 und x_1 so, dass der Exaktheitsgrad möglichst groß wird.

2,5 Punkte

Aufgabe 15. Das folgende Integral soll näherungsweise berechnet werden:

$$\int_0^2 2x \sin(\pi x) \ \mathrm{dx}.$$

(a) Benutzen Sie dazu die summierte Trapezregel, wobei das Intervall in 4 Teile geteilt werden soll.

(b) Schätzen Sie, wieviele Stützstellen in der summierten Trapezregel nötig sind, um bei der Berechnung des obigen Integrals einen Fehler $\leq 10^{-3}$ zu erreichen.

1+2 Punkte