Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

2 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Menge

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$$

in $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese. 2 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Realteil von $(1-i)^{201}$.

2 Punkte

Aufgabe 4. Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{4}a_n^2 + 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass $|a_n| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und dass (a_n) monoton wächst. Begründen Sie, warum (a_n) konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

2 Punkte

Aufgabe 5. Begründen oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 2^{-k}.$$

1 Punkt

Aufgabe 6. Sei $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+2)}$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty[$$

genügt.

(c) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(d) Zeigen Sie, daß f monoton fallend ist und bestimmen Sie f^{-1}.

(e) Bestimmen Sie die Extremwerte von f, falls diese existieren. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Aussagen von vorherigen Teilen dürfen benutzt werden.

5 Punkte

Aufgabe 7. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln |x|$.

2 Punkte

Aufgabe 8. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(2x-1)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom T_n vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0.5$. Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit der Fehler

$$\|f - T_n\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n(x)|$$

kleiner gleich $\frac{1}{8}$ ist?

2 Punkte

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x\ln(3x)}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 x^2\sin(\pi x)\,dx.$$

3 Punkte

Aufgabe 10. Entscheiden Sie, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. 1 Punkt

Aufgabe 11. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ der von v_1 und v_2 aufgespannte Unterraum. Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element u^* des Unterraums U.

2 Punkte

Aufgabe 12. Begründen Sie die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrals und berechnen Sie es:

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx.$$

2 Punkte

Aufgabe 13. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zweiten Grades, welches f in den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$ und $x_2 = 3\pi$ interpoliert. Geben Sie dabei das Interpolationspolynom

(a) in der Darstellung durch die Lagrange-Basispolynome,

(b) in der Darstellung durch die Newton-Basis

an. Geben Sie eine einfache Abschätzung für den maximalen Interpolationsfehler auf dem Intervall $[0, 3\pi]$ an.

3 Punkte

Aufgabe 14. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ soll für große x ausgewertet werden. Dazu betrachten Sie die beiden Algorithmen zur Auswertung von f:

$s := x + 1$	$s := x + 1$
$t := \sqrt{s}$	$t := \sqrt{s}$
$u := \sqrt{x}$	$u := \sqrt{x}$
$v := t + u$	$f_2 := t - u$
$f_1 := \frac{1}{v}$	

(a) Bestimmen Sie die relative Kondition von f. Entscheiden Sie, ob das Problem gut konditioniert ist, und begründen Sie dies.

(b) Entscheiden und begründen Sie, welcher der beiden Algorithmen zur Auswertung von f vorzuziehen ist.

3 Punkte