Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n}{2}(n+1).$$

3 Punkte

Aufgabe 2. Prüfen Sie nach, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}, \qquad (b)\ \lim_{x\to -2} \frac{|x+2|}{2x+4}.$$

3 Punkte

Aufgabe 3. (a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin(n)}{n^5 + 1}.$$

(b) Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) hinsichtlich punktweiser Konvergenz:

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f_n(x) = \frac{1}{1 + n|x|^3}.$$

Begründen oder widerlegen Sie, ob die Grenzfunktion f stetig ist oder nicht.

4 Punkte

Aufgabe 4. Besitzt die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{6x^2}{x^3 + x^2 + 1}$ ein globales Maximum oder ein globales Minimum auf $[1, \infty)$?

4 Punkte

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^{x^3} e^{t^2}\, dt$.

3 Punkte

Aufgabe 6. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

Hinweis: Substitution.

4 Punkte

Aufgabe 7. (a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig, und sei $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$, dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der $(m \times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen, definiert wird.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Monome $1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

4 Punkte

Aufgabe 8. Sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^3$.

(b) Die rechte Seite b werde durch

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

gestört, d.h. es gelte $Ax = b$ bzw. $A\widetilde{x} = b + \Delta b$ mit eindeutigem x bzw. $\widetilde{x}$. Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

Hinweis: Es gilt: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 9. Zur Auswertung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ sei der Algorithmus

$$y_1 := x^2, \quad y_2 := 1 + y_1, \quad y_3 := \frac{x}{y_2}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems für alle $x \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, ob das Problem gut konditioniert ist.

(b) Betrachten Sie obigen Algorithmus. Ist dieser Algorithmus stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenenfalls einen stabilen Algorithmus an.

3 Punkte