Prof. Manuel Torrilhon
Lukas Netterdon
Paul Wilhelm

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2024
Klausur am 27.08.2024 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Beweisen Sie, dass $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 5 teilbar ist.

2.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 + i\\
z_2 &= 3 - 2i\\
z_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(\bar{z}_3)^4$

b) $|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}|^2$

1.0+1.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Für $\beta \geq 1$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = \beta,$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\beta}{a_n}\right).$$

(a) Finden Sie ein $\alpha > 0$, so dass

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$a_n \geq \alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

> **Hinweis:** Zeigen Sie dazu, dass $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{\beta}{x})$ für $x \geq \alpha$ monoton steigend ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt.

(d) Begründen Sie, warum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

> **Hinweis:** Vorangegangene Aufgabenteile dürfen benutzt werden, auch wenn sie von Ihnen nicht gelöst wurden.

1.0+2.0+1.0+1.0 Punkte

Aufgabe 4.

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3}{(4j+1)(4j+5)}$$

konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{3}{(4j+1)(4j+5)} = \frac{A}{4j+1} - \frac{B}{4j+5}.$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos^2(n\pi) \left(\frac{x}{4}\right)^n ?$$

3.0+1.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| + 1 + (1 + |x|)^{-1}$.

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass die Funktion f stetig ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

2.0+1.0+1.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

(a) Wie viele Extremstellen kann das Polynom

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

maximal besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Finden Sie alle Extremstellen der Funktion $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$ im Intervall $(-3, 3)$.

(c) Besitzt die Gleichung $(x^2 - 9)(x^2 + 1) = -4\pi$ eine Lösung im Intervall $(-3, 3)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

0.5+2+1.5 Punkte

Aufgabe 7.

Betrachte $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \, e^x$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

b) Berechnen Sie eine Annäherung für e, indem Sie $T_3(x)$ an einer geeigneten Stelle x^* auswerten. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers $|f(x^*) - T_3(x^*)|$ an.

1.5+1.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

a) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 t \exp(-t^2) dt.$$

Nutzen Sie Integrationsregeln, um die Stammfunktion zu bestimmen. Sie müssen nicht überprüfen, dass der Integrand integrierbar ist.

b) Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx$$

und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals.

1.5+1.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen zunächst auf punktweise, dann auf gleichmäßige Konvergenz:

a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, \quad 0 \leq x \leq 1$

b) $g_n(x) = e^{n(x-1)}, \quad 0 < x < 1$

2.0+2.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 10.

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren v_1, v_2, v_3 die daraus konstruierten Vektoren

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= v_1 \\
\omega_2 &= v_2 - \frac{\omega_1 \cdot v_2}{\|\omega_1\|^2}\omega_1 \\
\omega_3 &= v_3 - \frac{\omega_1 \cdot v_3}{\|\omega_1\|^2}\omega_1 - \frac{\omega_2 \cdot v_3}{\|\omega_2\|^2}\omega_2
\end{aligned}$$

jeweils zueinander orthogonal sind.

c) Bestimmen Sie die zu $\{a, b, c\}$ gehörige Orthogonalbasis.

1.0+1.0+1.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1 + x_3) \\ x_2 + 3x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie die Matrix der Abbildung und bestimmen Sie deren Rang,

b) Bestimmen eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der Abbildung.

1.0+2.0 Punkte

Aufgabe 12.

a) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von α und β derart, dass das LGS

(i) genau eine Lösung,

(ii) keine Lösung,

(iii) unendlich viele Lösungen

besitzt. Für Fall (i) geben Sie bitte die eindeutige Lösung in Abhängigkeit von den Parametern α und β an.

b) Berechnen Sie das Matrix-Produkt $A \cdot B$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die dazugehörige lineare Abbildung $\Phi_{A \cdot B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an und spezifizieren Sie $n, m \in \mathbb{N}$.

2.0+1.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Unterraum

$$U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie die Bestapproximation v_3 in U, also $u^* \in U$ mit

$$\|u^* - v_3\|_2 = \min_{u \in U} \|u - v_3\|_2.$$

2.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 14.

Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a \in \mathbb{R}$:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

2.0+1.0 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

a) Sei $\Phi : V \to V$ eine unitäre Abbildung über den $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $\Phi^{-1} = \Phi^*$.

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte λ einer orthogonalen Matrix A die Eigenschaft $|\lambda| = 1$ erfüllen.

1.0+3.0+1.0 Punkte