Vertr.-Prof.
Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Paul Wilhelm
Vladimir Dordic

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2023
Klausur | 29.08.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 08.09.2023 von 10:00 - 11:00 Uhr im klPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	3	5	4	4.5	3	4	3	3	2.5	3	4	3	2	3	50
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt:

$$z^6 = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$$

b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z) \wedge \mathrm{Re}(z) \leq -1 \wedge |z+1| \geq 1\}$$

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n c^n,$$

wobei $0 < c < 1$.

a) Beweisen Sie anhand des ε-Kriteriums, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und geben Sie den Grenzwert an.

b) Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Konvergiert die Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zeigen Sie anhand der Exponentialreihe

$$\mathsf{exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k,$$

dass

$$\mathsf{exp}(a) \cdot \mathsf{exp}(b) = \mathsf{exp}(a+b).$$

Hinweis: Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Binomial-Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1.5+1.5+0.5+1.5 Punkte

Aufgabe 4.

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Sind sie auch absolut konvergent?

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n}{n^3 - 3n - 1}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n2^{-n^2}$$

1.5+2.5 Punkte

Aufgabe 5.

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion f. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty)$$

erfüllt.

(e) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

0.5+1+1+1.5+0.5 Punkte

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktion:

$$f : [-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 50.$$

Nutzen Sie nur Monotonie-Argumente, keine zweiten Ableitungen, um die Art der Extrema zu bestimmen.

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 7.
Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log(1 + x)$.

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_n(x)$ bis zur n-ten Ordnung (Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$) und das Restglied $R_{n+1}(x, x_0)$.

> **Hinweis:** Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von $f(x)$ ($k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) durch
>
> $$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$
>
> gegeben ist.

b) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds für $x \in [0, 1]$ ab und zeigen Sie, dass dieser durch

$$|R_{n+1}(x, 0)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

abgeschätzt werden kann.

3+1 Punkte

Aufgabe 8.
Berechnen Sie das Integral

$$\mathcal{I} = \int \exp(x) \sin(x) \, dx.$$

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

Bestimmen Sie folgendes Integral mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 14}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} dx$$

Hinweis: Eine der Nullstellen des Polynoms im Nenner ist gegeben durch $x_0 = 2$.

3 Punkte

Aufgabe 10.

a) Untersuchen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_1(t) = \sin(t), \quad f_2(t) = \sin(2t), \quad f_3(t) = \sin(3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

linear unabhängig ist.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

1.5+1 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1 + x_3) \\ x_2 + 3x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie die Matrix der Abbildung und bestimmen Sie deren Rang,

b) Bestimmen eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der Abbildung.

1+2 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & \alpha - 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ \alpha & -3 & 3\alpha & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix A regulär, für welche singulär?

4 Punkte

Aufgabe 13.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

(b) Sei $A = (v_1 \mid v_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ die Matrix mit Spalten v_1 und v_2. Ferner sei $x^* \in \mathbb{R}^2$ der Koeffizientenvektor, so dass $u^* = Ax^*$. Zeigen Sie, dass x^* die Gleichung

$$A^T A x^* = A^T v_3$$

erfüllt.

Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass $v_3 - u^* = v_3 - Ax^*$ orthogonal auf $\text{Im}(A) = \{Ay \,:\, y \in \mathbb{R}^2\}$ steht.

2+1 Punkte

Aufgabe 14.

a) Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Beweisen Sie $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ für alle invertierbaren $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1+1 Punkte

Aufgabe 15.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & a \\ 13 & -6 & b \\ 13 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

.

a) Finden Sie a und b so, dass die Eigenwerte der Matrix A gleich 1 und 2 sind.

b) Finden Sie den dritten Eigenwert der Matrix A für die in a) bestimmten Werte von a und b. Stimmt es, dass für die gleichen Werte von a und b die Matrix A der Matrix B ähnlich ist?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2+1 Punkte

Name: Mat-Nr.: