Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | WS 2020/21
Klausur | 16.08.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 30.08.2021 von 08:30 - 11:00 Uhr im Hauptgebäude Hörsaal I (1010|101) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3	7	8	5	8	6	7	10	5	7	6	7	7	8	6	100
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Zeigen Sie für $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 \left(n+1\right)^2$$

3 Punkte

Aufgabe 2.

Betrachten Sie den Funktionenraum $F = \{f : (0,1) \to \mathbb{R}\}$. Entscheiden Sie mit Begründung ob die Funktionen in folgenden Teilmengen von F linear abhängig oder unabhängig sind. Geben Sie im Fall der linearen Abhängigkeit eine Darstellung der Nullfunktion und die größte linear unabhängige Teilmenge an.

(a) $A = \{f, g, h\} \subset F$ mit

$$f(x) = \log(x), \quad g(x) = \log(2x), \quad h(x) = 2\log(x)$$

(b) $A = \{f, g, h\} \subset F$ mit

$$f(x) = 1 + x^2, \quad g(x) = 2 + x^2, \quad h(x) = 1 + 2x^2$$

(c) $A = \{f, g\} \subset F$ mit

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \exp(x+1)$$

(d) $A = \{f, g\} \subset F$ mit

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \sin(2x)$$

2+2+1+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a, x\rangle \leq 0\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 1\}$,

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A^{-1}x = 0\}$,

(d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon$ es existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = A^{-1}y\}$.

2+2+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

5 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben seien die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ y + 5x \end{pmatrix}$$

und

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto x + y + z$$

a) Zeigen Sie die Linearität der Abbildungen φ und ψ.

b) Identifizieren Sie jeweils die zugehörige Matrix.

c) Bilden Sie die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ und geben Sie die Matrix an.

d) Diskutieren Sie die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$.

3+2+2+1 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

4+2 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 5 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det A$.
Hinweis: Nutzen Sie die Struktur der Matrix und versuchen Sie nicht direkt die Determinante zu berechnen.

(b) Geben Sie alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an für die gelten

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie $\det A = 2$.

4+3 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4-4\alpha \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von α?

(c) Für welche α ist die Matrix A diagonalisierbar?

6+1+3 Punkte

Aufgabe 9.

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 - 9(i)^3 = 90i.$$

b) Sei $t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$. Finden Sie, für jedes t, die Exponentialdarstellung der komplexen Zahlen

$$z(t) = t\cos(t) + i\,t\sin(t)$$

sowie $\overline{z(t)}, iz(t), \overline{iz(t)}, z^2(t)$ und $|z(t)|$.

2+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.
Sei

$$a_n = \frac{4n^2 - 2}{2n^2 + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge *monoton* und *beschränkt* ist.

b) Damit folgt aus a) die Konvergenz.
   (i) Bestimmen Sie den Grenzwert.
   (ii) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diesen Grenzwert hat mittels direkter Anwendung der Definition des Grenzwertes.

3+4 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$$

Zeigen Sie, dass man mittels des Majorantenkriteriums und mittels des Wurzelkriteriums die Konvergenz der Reihe zeigen kann, jedoch nicht mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Bestimmen Sie anschließend den Wert der Reihe.

Hinweis: Es gilt für $a > 0$: $\sqrt[n]{a} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

6 Punkte

Aufgabe 12.

a) Zeigen das Sie, das $f(x) = x^2 - x$ gleichmäßig stetig $(0, 1)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $g(x) = \frac{1}{1-x}$ stetig aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1)$ ist.

3+4 Punkte

Aufgabe 13.

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^R x^n e^{-x} dx, \qquad R > 0,\ n \in \mathsf{N}$$

Hinweis: Verfahren Sie rekursiv.

b) Zeigen Sie dass $\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$

c) Finden Sie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ so dass

$$\cos(x) = \int_0^x \cos(y)^2 \sin(y) dy \tag{1}$$

3+2+2 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 2)^2$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f und berechnen Sie die erste und zweite Ableitung.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f. Handelt es sich bei den Extrema um Minima oder Maxima?

(c) In welchen Bereichen ist die Funktion f konvex, in welchen ist sie konkav?

3+3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.

Sei $f(x) = \ln(x+1)$ Leiten Sie die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$ her. Was ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihen?

6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: