Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Sebastian Krumscheid, Ph.D

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2020
Klausur | 24.08.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 09.09.2020 von 09:00–11:00 Uhr im Eph (1090|321), Rogowski Gebäude, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Punkte	8	6	8	4	8	14	7	5	9	9	12	7	3	100
Ihre Punkte														

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass $2^n < n!$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

b) Zeigen Sie, dass $n! < n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

4+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei $t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$. Finden Sie, für jedes t, die Exponentialdarstellung der komplexen Zahlen

$$z(t) = \sqrt{t}\cos\left(t^2\right) + i\sqrt{t}\sin\left(t^2\right)$$

sowie $\overline{z(t)}, iz(t), \overline{iz(t)}, z^2(t)$ und $|z(t)|$.

1+1+1+1+1+1 Punkte

Aufgabe 3.
Sei

$$a_n = \frac{8n^2 - 5}{4n^2 + 7}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge *monoton* und *beschränkt* ist.

b) Damit folgt aus a) die Konvergenz.
   (i) Bestimmen Sie den Grenzwert.
   (ii) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diesen Grenzwert hat mittels direkter Anwendung der Definition des Grenzwertes.

3+5 Punkte

Aufgabe 4.
Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, zwei positive reelle Folgen. Seien die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergent. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$$

somit ebenfalls konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sqrt{a_k b_k} < a_k + b_k$ gilt.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$, mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall. Geben Sie das $\varepsilon - \delta$ Kriterium

(i) für die Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in I$.

(ii) für die gleichmäßige Stetigkeit von f auf I.

b) Sei $I = (0, 1)$ und die folgende Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2 - 10x.$$

Analysieren Sie f und g auf gleichmäßige Stetigkeit.

2+6 Punkte

Aufgabe 6.

a) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = |x|$$
auf dem Intervall $(-1, 1)$ Lipschitz stetig und/oder differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Leiten Sie die Taylorentwicklung von $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \ln(x + 1)$$
zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her. Benutzen Sie dabei das Prinzip der vollständigen Induktion um $f^{(k)}(x), \forall\, k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ zu bestimmen.

c) Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass es für jede stetige Funktion f auf $[a, b]$, welche auf (a, b) differenzierbar ist, ein Punkt $x \in [a, b]$ existiert, sodass
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b + a}{2x} f'(x).$$

5+6+3 Punkte

Aufgabe 7.
Sei

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{x}$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

5+2 Punkte

Aufgabe 8.
Berechnen Sie das Integral

$$\mathcal{I} = \int \exp(x)\sin(x)\;dx.$$

5 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & \alpha - 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ \alpha & -3 & 3\alpha & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix A regulär, für welche singulär?

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters α alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$, so dass das lineare System $Ax = b$ eine Lösung hat.

4+5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

Im Vektorraum $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, also dem Raum der Polynome vom Grade kleiner-gleich 3 über $\mathbb{R}$, sind sowohl

$$\mathscr{B} := \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$$

mit $b_0(x) = 1,\ b_1(x) = x,\ b_2(x) = x^2$ und $b_3(x) = x^3$, als auch

$$\mathscr{C} := \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$$

mit $c_0(x) = x^2,\ c_1(x) = 2x^2 - 1,\ c_2(x) = x^2 - x$ und $c_3(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$, Basen von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Sei $\phi : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$p \mapsto \phi(p) := \frac{d}{dx}p.$$

a) Bestimmen Sie, die Matrixdarstellungen der lineare Abbildungen ϕ und $\psi := \phi \circ \phi$ jeweils bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

b) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung der lineare Abbildungen ϕ und $\psi := \phi \circ \phi$ jeweils bezüglich der Basis $\mathscr{C}$ von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

c) Ist die Abbildung ϕ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

3+4+2 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \{-1, 1\}$, für die bekannt ist, dass ein Eigenwert 1 ist.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit vom Parameter α.

b) Begründen Sie weshalb A nur für $\alpha = -1$ diagonalisierbar ist und nicht für $\alpha = 1$.

c) Diagonalisieren A für $\alpha = -1$.

d) Nutzen Sie Teil c) um A^n für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

Hinweis: Sei $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit Einträgen $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$. Dann kann die Inverse M^{-1} entweder mithilfe des Gauss-Verfahrens angewandt auf $(M|I)$ bestimmt werden, oder über die Formel

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} m_{2,2}m_{3,3} - m_{2,3}m_{3,2} & -m_{1,2}m_{3,3} + m_{1,3}m_{3,2} & m_{1,2}m_{2,3} - m_{1,3}m_{2,2} \\ -m_{2,1}m_{3,3} + m_{2,3}m_{3,1} & m_{1,1}m_{3,3} - m_{1,3}m_{3,1} & -m_{1,1}m_{2,3} + m_{1,3}m_{2,1} \\ m_{2,1}m_{3,2} - m_{2,2}m_{3,1} & -m_{1,1}m_{3,2} + m_{1,2}m_{3,1} & m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} \end{bmatrix}$$

4+2+4+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 12.

Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U := \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle a, x \rangle = 0\}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ das standard Skalarprodukt bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von U.

b) Berechnen Sie die Bestapproximation von b bezüglich U, d.h. finden Sie $v^* \in U$ mit

$$\|v^* - b\| \leq \|v - b\| \quad \text{für alle } v \in U.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von U.

4+3 Punkte

Aufgabe 13.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Für eine unitäre Matrix A haben alle Eigenwerte von A den Betrag eins.

3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Viel Erfolg!