Professor Dr. Benjamin Berkels
Professurvertreter Dr. Jan Giesselmann

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2018
Klausur | 20.08.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 30.08.2018 von 10:30–12:30 Uhr im 1090|301 (E1) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
Punkte	5	7	8	5	7	4	9	7	6	5	8	6	6	7	90
Ihre Punkte															

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

5 Punkte

Aufgabe 2.

Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ durch

$$x_n := \log\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{beziehungsweise} \qquad y_n := \frac{1+n}{n^2-n+10}$$

definiert. Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Wenn eine Folge konvergiert, zeigen Sie dies mittels der Definition von Konvergenz.

7 Punkte

Aufgabe 3.

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+4} \right)^n$$

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$$

konvergiert.

(c) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}?$$

Vergessen Sie nicht, auch die Ränder des Konvergenzbereiches zu untersuchen.

8 Punkte

Aufgabe 4.
Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

a) stetig in 0 ist.

b) nicht lipschitzstetig in 0 ist.

5 Punkte

Aufgabe 5.
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \cos(x^2 - 1)$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades, $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

b) Sei $I = [0, 2]$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_2(x)|$$

auf dem Intervall I.

7 Punkte

Aufgabe 6.

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) \cdot (\exp(x) - 1), & x \geq 0 \\ -(x+1) \cdot (\exp(x) - 1), & x < 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$.

4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\int \exp(x) \sin(x)\, dx$

(b) $\int_0^1 x^3 \exp(-x^4) dx$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-2\sqrt{t}) dt$

9 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

7 Punkte

Aufgabe 9.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

6 Punkte

Aufgabe 10.

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$f(x) = a \, \mathsf{sgn}(x) \sqrt{|x|}, \qquad a \in [-1,1]$$

mit

$$\mathsf{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}.$$

Für welche $a \in [-1,1]$ ist die Abbildung f surjektiv, injektiv, bijektiv?

5 Punkte

Aufgabe 11.

Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a, x\rangle = 0\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a, x\rangle = 1\}$,

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = 0\}$,

(d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0\}$.

8 Punkte

Aufgabe 12.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die dazu gehörige Matrix und geben Sie ihren Rang und eine Basis des Kerns und des Bildes an.

6 Punkte

Aufgabe 13.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

6 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 14.

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass

$$B = SAS^{-1}$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass dieser Begriff der Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert.

b) Es seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass diese nicht ähnlich sind.

7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: