Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2017
Klausur am 24.08.2017 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & a \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a-10 \end{pmatrix}}_{:=b}. \tag{1}$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das System (1) keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A für $a = 8$.

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das System (2) keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{b}} \tag{2}$$

2,0+0,5+2,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \geq 0$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A aus Aufgabenteil a) in Abhängigkeit vom Parameter $a \geq 0$.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A aus Aufgabenteil a) für $a = 2$. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

0,5+1,0+4,0 Punkte

Aufgabe 3.

a) Betrachten Sie die Abbildung $f\colon [-1,1] \to [0,1]$ gegeben durch

$$f(x) = ax^2, \qquad a \in [0,1].$$

Für welche $a \in [0,1]$ ist die Abbildung f surjektiv, injektiv, bijektiv?

b) Beweisen Sie, dass die Verknüpfung zweier injektiven Abbildungen injektiv ist.

c) Betrachten Sie die Abbildung $g\colon [0,2\pi] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$g(x) = \sin(ax), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung g surjektiv, injektiv, bijektiv?

1,0+1,5+2,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Seien $n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a, x\rangle \leq 0$ und $\langle a, x\rangle \geq 0\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$,

(c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x$ ist ein Eigenvektor von $A\}$,

(d) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

1,0+1,0+1,0+1,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ orthogonal (d. h. $A^T = A^{-1}$) und daher auch diagonalisierbar (Spektralsatz). Beweisen Sie, dass für alle Eigenwerte λ gilt: $|\lambda| = 1$.

b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \leq V$ ein Unterraum. Sei $\mathbf{u}^* \in U$ die Bestapproximation zu $\mathbf{v} \in V$ gegeben durch

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}^*\| = \inf_{\mathbf{u} \in U} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|, \qquad (*)$$

wobei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm sei. Zeigen Sie, dass dann

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{u}^*, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in U$$

gilt.

1,0+2,5 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \phi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ x_2 - x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 100x_2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Berechnen Sie eine Basis des Bildes sowie des Kerns der linearen Abbildung ϕ. Überprüfen Sie den Dimensionssatz.

1,5+2,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt:

$$z^6 = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$$

b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z) \wedge \mathrm{Re}(z) \leq -1 \wedge |z+1| \geq 1\}$$

2,0+1,5 Punkte

Aufgabe 8.

a) Untersuchen Sie die beiden Folgen

$$a_n = \frac{8n^2 + \sqrt{3n}}{7n + 4}, n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{\sqrt{9n^2 - 5}}{n + 1}, n \in \mathbb{N},$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{(3n + 4)^2}{\frac{3}{4}n^2 - 2}, n \in \mathbb{N},$$

mit Hilfe der Definition.

1,5+1,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n}{n^3 - 3n - 1}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n 2^{-n^2}$$

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 10.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| + \frac{2}{1+|x|}$.

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass die Funktion f stetig ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

2,0+0,5+0,5 Punkte

Aufgabe 11.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + ax & \text{falls } x < 0 \\ \ln(ax + 1) & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Was ist das größte $n \in \mathbb{N}_0$, sodass f in $x = 0$ n-mal stetig differenzierbar ist?

4,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 12.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 1}}\right).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen und mögliche Kandidaten für Extrema.

(c) Geben Sie das maximale Intervall $I \subset D_f$ an, auf dem f monoton steigend ist.

1,0+1,5+1,0 Punkte

Aufgabe 13.
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte sofern sie existieren

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(4x))}{\ln(\cos(2x))},$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

2,0+1,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 14.
Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

3,0 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 15.

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

a)

$$\int (1 - \frac{1}{x}) \ln(x) \, dx$$

b)

$$\int \frac{-x^2 + x + 4}{3x^3 - 5x^2 + x + 1} \, dx$$

1,5+2,0 Punkte

Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2017
Klausur am 24.08.2017 | Hörsaalprotokoll

Hörsaal ________________

Hörsaalverantwortlicher ______________________________

Anzahl Klausuren

Anzahl der Anmeldungen in diesem Hörsaal:	______
− Anzahl der nichterschienenen Kandidaten:	______
− Anzahl der Krankmeldungen während der Klausur:	______
+ Anzahl der Kandidaten unter Vorbehalt:	______
Theoretisch einzusammelnde Klausuren:	______
Anzahl der eingesammelten Klausuren:	______

Ist eine Differenz entstanden? Wieso?
Name und Matrikelnummer der Kandidaten, deren Klausuren fehlen:

_________________________ _________________________

_________________________ _________________________

Toilettenliste

#	Uhrzeit (von – bis)	Matrikelnummer
1		
2		
3		
4		
5		
6		

#	Uhrzeit (von – bis)	Matrikelnummer
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Vorkommnisse (z.B., Störungen extern, Täuschungsversuche, vorzeitiger Abbruch der Prüfung, verspätete Abgabe):

____

____

Relevante Regelungen der Prüfungsordnung:

§15(2) Eine Prüfung gilt als mit “nicht ausreichend” (5,0) bewertet, wenn die Kandidatin bzw. der Kandidat zu einem Prüfungstermin ohne triftige Gründe nicht erscheint oder wenn sie bzw. er nach Beginn der Prüfung ohne triftige Gründe von der Prüfung zurücktritt. Dasselbe gilt, wenn eine schriftliche Prüfung nicht innerhalb der vorgegebenen Bearbeitungszeit erbracht wird. In diesem Fall besteht kein Anrecht auf eine mündliche Ergänzungsprüfung. Absatz 1 letzter Satz findet Anwendung.

§15(5) Versucht die Kandidatin bzw. der Kandidat das Ergebnis einer Prüfung durch Täuschung, z.B. Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel, zu beeinflussen, gilt die betreffende Prüfung als mit “nicht ausreichend” (5,0) bewertet. Die Feststellung wird von der bzw. dem jeweiligen Prüfenden oder von der für die Aufsichtführung zuständigen Person getroffen und aktenkundig gemacht. Eine Kandidatin bzw. ein Kandidat, die bzw. der den ordnungsgemäßen Ablauf der Prüfung stört, kann von der bzw. dem jeweiligen Prüfenden oder der aufsichtführenden Person in der Regel nach Abmahnung von der Fortsetzung der Prüfungsleistung ausgeschlossen werden. In diesem Fall gilt die betreffende Prüfung als mit “nicht ausreichend” (5,0) bewertet. Die Gründe für den Ausschluss sind aktenkundig zu machen. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches wird die Kandidatin bzw. der Kandidat zudem exmatrikuliert werden.

Weitere Regelungen:

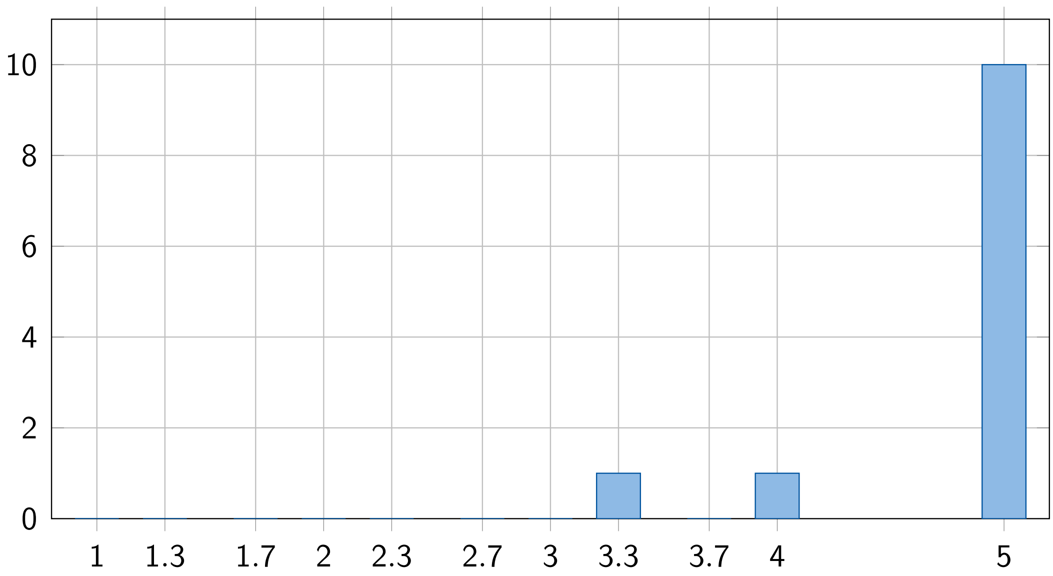
- Prüfungsfähigkeit vor Beginn der Klausur erfragen.
- Nicht-angemeldete Studierende müssen eine Vorbehaltserklärung ausfüllen.
- Im Zweifelsfall Vorkommnisse ins Protokoll aufnehmen.

Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 2017
Klausur am 24.08.2017 | Notenskala und Statistik

Note	Punkte	Statistik
1.0	51.5 – 54.5	0
1.3	49 – 51	0
1.7	46.5 – 48.5	0
2.0	43.5 – 46	0
2.3	41 – 43	0
2.7	38 – 40.5	0
3.0	35.5 – 37.5	0
3.3	32.5 – 35	1
3.7	30 – 32	0
4.0	27 – 29.5	1
5.0	0 – 26.5	10

Notenskala



Notenstatistik