Dr. Graham Alldredge
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen I (CES) | SS 20116
Klausur | 18.08.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 01.09.2016 von 10–11 Uhr im Seminarraum 328 im 3. Stock des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	2	3,5	3,5	2,5	3,5	4	2	3,5	4	2	3	3	4	4	5,5	50
Ihre Punkte																

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Die Fibonacci-Folge $\{x_k\}$ ist durch

$$x_1 := 1, \qquad x_2 := 1, \qquad x_k := x_{k-1} + x_{k-2}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass x_{3n} eine gerade Zahl für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. gilt.

2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

(a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die $z^3 = -8i$ erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass
$$z \sim y \Leftrightarrow \mathsf{arg}(z) = \mathsf{arg}(y)$$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, wobei arg der Winkel einer komplexen Zahl ist. Skizzieren Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen in der Komplexebene.

1,5+2 Punkte

Aufgabe 3.
Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ durch

$$x_n := \log\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{beziehungsweise} \qquad y_n := \frac{1+n}{n^2 - n + 10}$$

definiert. Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Wenn eine Folge konvergiert, zeigen Sie dies mittels der Definition von Konvergenz.

3,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

(a) Betrachten Sie die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+2}{4x^{2k}}.$$
Für welche x konvergiert sie? Werten Sie die Reihe für die konvergenten Fälle aus.

(b) Untersuchen Sie, ob die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k)!}$$
absolut konvergiert.

1,5+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Sei $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $f(x) = x^{-2}$.

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f stetig in $x_0 \in (0, \infty)$ ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D \subseteq (0, \infty)$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig auf $(1, 2)$ ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

2+0,5+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

(a) Finden Sie die erste, zweite und dritte Ableitung von f.

(b) Finden Sie das kubische Polynom $p(x)$, das sich am besten der Funktion lokal um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ annähert.

(c) Sei $I = [0.5, 1.5]$. Bestimmen Sie eine sinnvolle Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - p(x)|.$$

1+1,5+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + 3ax^2 & \text{falls } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Was ist das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $f \notin C^n((-1,1))$? Hierbei bezeichnet $C^n((-1,1))$ die Menge der reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $(-1,1)$, die n-mal stetig differenzierbar sind. Untersuchen Sie, wie die Antwort von a abhängt.

2 Punkte

Aufgabe 8.

(a) Wie viele Extremstellen kann ein Polynom dritter Ordnung besitzen? Begründen Sie.

(b) Finden Sie alle Extremstelle der Funktion $f(x) = (x^2 - 4)(x - 1/2)$ im Intervall $(-2, 2)$.

(c) Besitzt die Gleichung $(x^2 - 4)(x - 1/2) = 5$ eine Lösung im Intervall $(-2, 2)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

0,5 + 2 +1 Punkte

Aufgabe 9.
Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^\infty 2x^5 \exp(1 - x^6)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) \cos(x)\, dx.$$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 10.

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$

(b) $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to x^2$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \to x^2$

(d) $f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \to x^2$

0,5+0,5+0,5+0,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 11.

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden beiden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind.

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 + v_3 = 1 \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 \cdot v_2 = v_3 \right\}$

(c) Sei nun $U = \{f : D \to \mathbb{R},\ f$ ist ein Polynom vom Grad $\leq 3\}$ und $V = C^\infty(D, \mathbb{R})$, der Raum aller unendlich oft stetig differenzierbarer Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$. Ist U ein Untervektorraum von V? Begründen Sie Ihre Antwort.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass der Residuumsvektor $r = v_3 - u^*$ orthogonal zum Unterraum U ist.

(c) Sei $A = (v_1 \; v_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ die Matrix mit Spalten v_1 und v_2. Ferner sei $x^* \in \mathbb{R}^2$ der Koeffizientenvektor, so dass $u^* = Ax^*$. Zeigen Sie, dass x^* die Gleichung

$$A^T A x^* = A^T v_3$$

erfüllt.
Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass $v_3 - u^* = v_3 - Ax^*$ orthogonal auf $\mathrm{Im}(A) = \{Ay \,:\, y \in \mathbb{R}^2\}$ steht.

2+1+1 Punkte

Aufgabe 14.

Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen $\varphi_i : V \to W$ auf Linearität.
Falls φ_i linear ist, geben Sie die zugehörige Darstellungsmatrix an und bestimmen Sie deren Rang. Berechnen Sie außerdem eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung.

(a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}$

(b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$

4 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A und überprüfen Sie, ob die Eigenwerte

$$\text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

erfüllen.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix A. Ist diese Matrix diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

2,5+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: