Aufgabe 1.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellungen der komplexen Zahlen

$$z_1 = \overline{3 - \frac{3}{i}}, \quad z_2 = \frac{9+3i}{2-i}.$$

b) Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z, für die gilt

$$Re\left(\frac{\bar{z}}{1-z}\right) \geq 1.$$

2+2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Untersuchen Sie die folgende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n = \frac{3n^2+7}{n(2n^2+5)}, \quad b_n = \frac{3n+6}{\sqrt{9n^2+4}-3n}.$$

b) Beweisen Sie mittels der Definition die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{n^2+2}{4n^2-2}.$$

2+2 Punkte

Aufgabe 4.

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+4}{\sqrt{2n^2+1}}\right)^n.$$

b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^3$$

konvergent ist.

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 5.

Beweisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

2 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(x^2 - 1)$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

b) Sei $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $0 < \delta \leq 1$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_2(x)|.$$

2+2 Punkte

Aufgabe 7.
Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ stetig?

2 Punkte

Aufgabe 8.

a) Untersuchen Sie mittels der Definition für welche $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ rechtsseitig differenzierbar ist.

b) Bestimmen sie die erste Ableitung der Funktion

$$g : [0, \infty) \to [-1, 1],\ ,\ g(x) = \sin(x^{\frac{3}{2}})$$

und geben Sie alle Kandidaten für Extrema an.

2 + 1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.
Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} \mathsf{d}x.$$

b)

$$\int \frac{4x^3 - 7}{x^4 - x^2} \mathsf{d}x.$$

1 + 3,5 Punkte

Aufgabe 10.

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist:

a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq 0\}$.

b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$.

c) $U = \{y \in \mathbb{R}^n :$ es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $y = Ax\}$.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 11.
Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U := \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle a, x \rangle = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Wie groß ist die Dimension von U?

b) Berechnen Sie die Bestapproximation von b bezüglich U, d.h. finden Sie $v^* \in U$ mit

$$\|v^* - b\| \leq \|v - b\| \quad \text{für alle } v \in U.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von U.

1,5+2,5 Punkte

Aufgabe 12.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Berechnen Sie eine Basis des Bildes sowie des Kerns der linearen Abbildung ϕ.

1,5+2 Punkte

Aufgabe 14.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha & 0 & \beta \\ \pi & \pi^2 & \pi^3 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & -\beta & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

Berechnen Sie $\det(A_{\alpha,\beta})$. Wann ist die Matrix $A_{\alpha,\beta}$ singulär? Das heißt, bestimmen Sie ferner die Menge

$$M = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, A_{\alpha,\beta} \text{ ist singulär}\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Blockstruktur der Matrix $A_{\alpha,\beta}$ aus.

2 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass charakteristische Polynom von A hat die Form

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36.$$

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und eine Basis der zugehörigen Eigenräume der Matrix A.
Hinweis: -2 ist eine Nullstelle von p_A.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1+3,5+0,5 Punkte