Aufgabe 1.

Zeigen Sie $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Hinweis: Es darf $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vorausgesetzt werden.

3,5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl

$$\left(\frac{3}{1+i}\right)^5,$$

wobei das Argument in $(-\pi, \pi]$ liegen soll.

b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geqslant 0,\ |z| < 1 \}$$

1,5 + 1 Punkte

Aufgabe 3.

a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{7n^3} \right)^n, \qquad b_n = \frac{\sqrt{9n^2 + 3n} - 3n}{3n + 6}$$

b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{12n^2 - 3n}{n^2 + 1}$$

mit Hilfe der Definition.

1,5 + 1,5 + 2 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+4} \right)^n$$

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$$

konvergiert.

2+2 Punkte

Aufgabe 5.

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

a) stetig in 0 ist.

b) nicht lipschitzstetig in 0 ist.

1,5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 6.

Kann man

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(2x))}$$

stetig in Null fortsetzen?

2,5 Punkte

Aufgabe 7.

Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und bestimmen Sie die Kandidaten für Extrema.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{1+4x}$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \cos(x^2 - 1)$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades, $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

b) Schätzen Sie

$$|f(x) - T_2(x)|$$

auf dem Intervall $[0, 2]$ ab.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a)

$$\int \frac{3x+4}{4x^2-x}\,dx$$

b)

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{8x}+1}\,dx$$

2 + 1,5 Punkte

Aufgabe 10.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}.$$

a) Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind?

b) Finden Sie für $b = 1$ ein $a \in \mathbb{R}$, sodass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

1,5 + 0,5 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die dazu gehörige Matrix und geben Sie ihren Rang und eine Basis des Kerns und des Bildes an.

3,5 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2\alpha & -2 & -2-2\alpha \\ 2 & 2 & 4 & 1-\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = 1$, $\beta = 1$ an.

1,5 + 1,5 + 1 Punkte

Aufgabe 13.
Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

2,5 Punkte

Aufgabe 14.
Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \\ a & 0 & 99 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinate von A und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

1 + 1,5 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von B die Form

$$p_B(\lambda) = (6 - \lambda) \cdot (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

hat.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B. Ist diese Matrix diagonalisierbar?

1,5 + 2 Punkte