Klausur Mathematische Grundlagen I (CES)

15.08.2013

Aufgabe 1.

Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \begin{pmatrix} x+y+1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) $V = \mathbb{R}^n$, $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k + \cdots + nx_n = n^2\}$ für $n \in \mathbb{N}$ fest.

c) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 7y = 21x\}$.

1 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl

$$\left(\frac{2}{1-i}\right)^5,$$

wobei das Argument in $(-\pi, \pi]$ liegen soll.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

$$M_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \;\wedge\; |z| > 1 \;\wedge\; \operatorname{Re}(z) \geqslant \operatorname{Im}(z) \,\}$$
$$M_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leqslant 1 \;\wedge\; |z-4| \leqslant 3 \,\}$$

1,5 + 2,5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 10x_3 - 6x_2 + 2x_1 \\ x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ 4x_3 + x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix zur Abbildung ϕ an und bestimmen Sie deren Rang.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 4.

a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad b_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 2n} - n}{2n+4}.$$

b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge

$$c_n = \frac{8n^2 - 2}{4n^2 + 1}$$

mit Hilfe der Definition.

1,5 + 1,5 + 2 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 2 ist.

a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerten von A sowie den zum Eigenwert 2 zugehörigen Eigenvektor.

b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

d) Es bezeichne I_3 die 3×3-Einheitsmatrix. Geben Sie die Eigenwerte von

$$B := A - I_3$$

an.

1.5 + 1 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 6.

a) Untersuchen Sie, für welche $m \in \mathbb{N}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{m^k}$$

konvergiert.

b) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(2k+3)^2}.$$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 7.

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhänging sind.

b) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

1 + 2 Punkte

Aufgabe 8.
Beweisen Sie mit Hilfe der Definition, dass die Funktion $f(x) = x^2$ nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

2,5 Punkte

Aufgabe 9.
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\10\\3\end{pmatrix}.$$

a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ abgebildet?

b) Geben Sie eine Darstellung vom Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 10.
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = |x \sin(x)|$ auf Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$.

3 Punkte

Aufgabe 11.
Betrachten Sie die Basis

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Es sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

und

$$L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Matrixdarstellung ${}_SL_S$ von L bezüglich der Basis S.
Hinweis: Eine lineare Abbildung ist vollständig durch ihre Wirkung auf eine Basis definiert.

5 Punkte

Aufgabe 12.
Betrachte $f(x) = e^{2x-1}$.

a) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades, $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$.

b) Sei $I = [x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}] = [0, 1]$. Bestimmen Sie eine scharfe Schranke für den Fehler

$$\max_{x \in I} |f(x) - T_3(x)|.$$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 13.

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det A$.

Hinweis: Nutzen Sie die Null-Blöcke strukturell aus!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge zum Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 14.

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3x^2 + x + 1}{x^3 + x} \, dx.$$

3,5 Punkte