Aufgabe 1.

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1).$$

3 Punkte

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \ \mathrm{Im}(\frac{z+i}{z-1}) = 0\}$ und skizzieren Sie M in der komplexen Ebene

3 Punkte

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{(n^2)}$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{e}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{2\sqrt{n} + 1}$

2+1 Punkte

Aufgabe 4.

Begründen oder widerlegen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)!}$

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(1 - 4x^2).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen und mögliche Kandidaten für Extrema.

(c) Geben Sie das maximale Intervall $I \subset D_f$ an, auf dem f monoton steigend ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$.

1+2+2 Punkte

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{x},$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^7 + x^2 + 1}{5x^7 - x^3 - x}.$$

2+1 Punkte

Aufgabe 7.

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion f. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty)$$

erfüllt.

(e) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

0.5+1+1+1.5+0.5 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachte $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 e^x$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ 3. Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(b) Berechnen Sie eine Annäherung für e, indem Sie $T_3(x)$ an einer geeigneten Stelle x^* auswerten. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers

$$|f(x^*) - T_3(x^*)|$$

an.

2+2 Punkte

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\, dx,$$

(b)

$$\int_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

2+1.5 Punkte

Aufgabe 10.

Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$$

existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

2.5 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_4 \\ x_2 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrix der Abbildung an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 12.

Seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ gegeben. Bestimmen Sie die Bestapproximation von $\mathbf{v}_3$ durch ein Element $\mathbf{u}^*$ des Teilraums U.

3 Punkte

Aufgabe 13.

(a) In einer numerischen Simulation werden Funktionswerte $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ einer Funktion f an den Stellen x_0, x_1, x_2 berechnet. Wie lassen sich daraus per Newton-Interpolation Approximationen für $f(0)$ und die Ableitung $f'(0)$ berechnen? Geben Sie explizite Formeln an.

(b) Wenden Sie das Ergebnis auf den Fall

i	0	1	2
x_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y_i	2	3	1

an, d.h. berechnen Sie die Approximationen für $f(0)$ und $f(1)$.

(c) Angenommen die Funktion f ist dreimal stetig differenzierbar. Wie lautet der Interpolationsfehler in (b)?

2+1+1 Punkte

Aufgabe 14.

Für das Integral

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

mit $a \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\}$ soll eine Quadraturformel der Form

$$\mathbf{I}[f] = c_0 f(x_0) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$$

mit $c_0, c_1, c_2, x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, entwickelt werden.

(a) Berechnen Sie c_0, c_1, c_2, x_0 in Abhängigkeit von a so, dass $\mathbf{I}[f]$ den Genauigkeitsgrad 3 hat.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Quadraturformel einen Genauigkeitsgrad > 3 ?

2+0.5 Punkte

Aufgabe 15.

Sei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\, dx.$$

(a) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

(b) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der Trapezregel.

(c) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der summierten Trapezregel, wobei Sie das Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

  (i) in drei äquidistante Teilintervalle zerlegen,

  (ii) in vier äquidistante Teilintervalle zerlegen.

(d) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der Simposon-Regel.

(e) Für welches Ergebnis erwarten Sie den kleinsten Fehler und warum?

0.5+0.5+1+0.5+0.5 Punkte